

La imagen de Fourier para la solución fundamental de la ecuación de Dirac

Ariel Rey Becerra

Facultad de Ciencias Básicas, Departamento de Física y Matemáticas
Universidad de Pamplona.

ABSTRACT

In this work, the Fourier image for the fundamental solution of the Dirac equation is constructed.

KEY WORDS

Fourier image, solution , Dirac equation

RESUMEN

La solución fundamental de la ecuación de Dirac, la cual se expresa a través de la función de Pauli – Jordan, resulta ser una herramienta muy útil para el estudio de la estructura fundamental del electrón relativista. En el presente trabajo se construye la imagen de Fourier para la solución fundamental en forma de ecuación generalizada de Euler, lo que facilita notoriamente el proceso matemático para el estudio de dicha solución fundamental.

PALABRAS CLAVES

Imagen de Fourier, solución, ecuación de Dirac

INTRODUCCIÓN

Como es sabido, la solución fundamental de la ecuación de Dirac se

expresa por medio de la función de Pauli – Jordan como sigue [Bogoliubov, 1976]:

$$D_t^m(x) = \gamma^0 \left(\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - imI \right) \left[\frac{\delta(t^2 - x^2)}{2\pi} - \frac{m}{4\pi} \theta(t - x) \frac{J_1(m\sqrt{(t^2 - x^2)})}{(t^2 - x^2)} \right], \quad (1)$$

donde δ es la función de Dirac, la función de Bessel, la función de Heaviside, las matrices de Dirac. Claro

está que (1) satisface el principio de la causalidad, el cual se expresa para las

funciones generalizadas [Gelfand, 1958] de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} & \int \dots \int D_{t_n - t_{n-1}}^m(x_n - x_{n-1}) \dots D_{t_1}^m(x_1 - x_0) \times \\ & \times \varphi(x_n - x_{n-1} + \dots + x_1 - x_0) d^{(3)}(x_1 - x_0) \dots d^{(3)}(x_n - x_{n-1}) = \\ & = \int D_{t_n}^m(x_n - x_0) \varphi(x_n - x_0) d^{(3)}(x_n - x_0). \end{aligned} \quad (2)$$

Esta integral converge gracias a la presencia de las funciones finitas. Se puede demostrar, partiendo de este principio, que la imagen de Fourier de

la solución fundamental (1) [Beilinson et al 2001], se describe como:

$$\tilde{D}_t^m(w) = I \cos(t\sqrt{m^2 + w^2}) - i\gamma^0 \frac{(\gamma, w) + mI}{\sqrt{m^2 + w^2}} \text{sen}(t\sqrt{m^2 + w^2}). \quad (3)$$

Esta imagen también satisface el principio de la causalidad. La fórmula

(3) puede ser expresada en forma exponencial [Beilinson et al 2001]:

$$\tilde{D}_t^m(w) = e^{-i\gamma^0[(\gamma, w) + mI]t} \neq e^{-i\gamma^0(\gamma, w)t} e^{-i\gamma^0 mt} \quad (4)$$

La imagen de Fourier es una función analítica de ω y t , por dicha razón se priva de dificultades que están presentes al analizar la solución fundamental en su forma tradicional (1). La expresión (4) puede ser obtenida directamente de la ecuación de Dirac, resolviéndola como una ecuación diferencial. Se hace énfasis en que las matrices en (4) no son conmutativas.

REFERENCIAS BLIOGRÁFICAS

1. N. N. Bogoliubov, D. B. Shirkov. Introduction to theory of quantum fields (Rus) // Moscow, 1976
2. I. M. Gelfand, G. E. Shilov. Generalized functions (Rus), Tom 1 // Moscow, Fitmatgus, 1958.
3. I. M. Gelfand, N. I. Vilenkin. Generalized functions (Rus) Tom 4 // Moscow, Fitmatgus 1961.
4. A. A. Beilinson, A. Becerra. Space-time structure of the Dirac equation // Vestnik R. P. F. University, series Physics 2001, No. 9, pag. 51-55.

Construcción de un scanner óptico para registrar imágenes 3-d utilizando la técnica de triangulación láser

Jorge E. Rueda¹, Angel R. Salazar², Jaime Meneses³

¹Facultad de Ciencias Básicas, Departamento de Física y Matemáticas. Grupo de Investigaciones en Optica&Plasma, Universidad de Pamplona.

jruedap2003@unipamplona.edu.co

² Grupo de Optica y Espectroscopía, UPB, Medellín, Colombia,

³ Grupo de Optica y Tratamiento de Señales, UIS, Colombia,

ABSTRACT

A system dedicated to the micro-topographic analysis of a surface, based on the technique laser triangulation is described. The resolution is of order of the micrometer and the observation sector is 9 mm². Experimental results are discussed and presented

KEY WORDS

Micro-topographic análisis, surface, laser triangulation

RESUMEN

Se describe un sistema dedicado al análisis micro-topográfico de una superficie, basado en la técnica de triangulación láser. La resolución es de orden del micrómetro y el campo de observación es 9 mm². Se discuten y presentan resultados experimentales.

PALABRAS CLAVES

Análisis micro-topográfico, superficie, triangulación láser.

INTRODUCCIÓN

La determinación de parámetros de rugosidad, y la inspección de la topografía y micro-topografía de superficies son algunos de los procedimientos utilizados en el control de calidad de productos acabados. Durante mucho tiempo se utilizaron

sistemas de metrología basados en el contacto directo de una punta para obtener información de la rugosidad y forma de superficies. La precisión, el tiempo de barrido y el deterioro de la superficie, junto con la aparición e implementación de nuevas técnicas ópticas y los adelantos electrónicos y computacionales, son algunas de las razones para reemplazar la técnica por

sistemas de inspección ópticos. Diferentes métodos ópticos, como interferometría en luz blanca y monocromática^{1,2}, microscopía confocal³, interferometría Moiré, proyección de franjas y triangulación láser^{4,5}, compiten en efectividad, tiempo de análisis, resolución, costo y rango de medidas para el diseño de sistemas de reconstrucción 3D.

Especial interés se ha mostrado en la técnica de triangulación láser. Aunque en sus aplicaciones se incluye la inspección de formas 3D y la evaluación topográfica en rangos de medidas desde el milímetro, recientemente se viene utilizando en la micro-inspección de superficies rugosas. En este trabajo se describe un

sistema óptico dedicado al análisis de la micro-topografía de una superficie basado en la técnica de triangulación láser. La efectividad del sistema, su bajo costo y la resolución obtenida hacen de este sistema un elemento útil para la inspección topográfica de objetos producidos por la industria en nuestro medio.

SISTEMA OPTICO

La siguiente figura muestra un esquema del dispositivo de triangulación utilizado en la reconstrucción 3D.

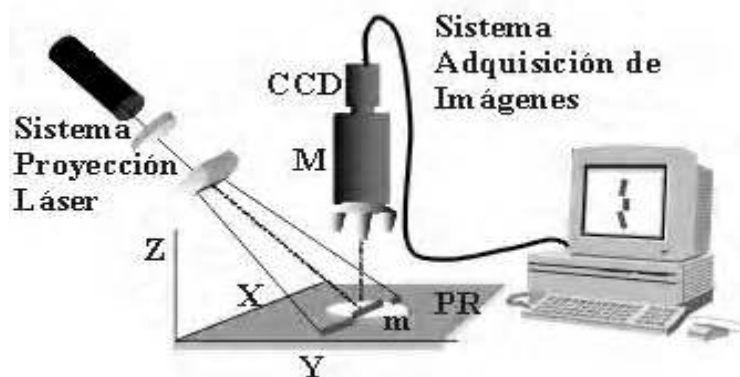


Figura 1. Dispositivo de triangulación láser utilizado para la reconstrucción 3-D. M: microscopio; m: muestra; PR: plano de referencia.

A partir de una combinación de lentes esféricas y cilíndricas, el sistema de proyección permite focalizar una línea láser sobre la muestra a analizar. La imagen de la línea deformada por el cuerpo es formada por un microscopio sobre el plano de la CCD y enviada al computador. El cuerpo se ubica sobre la plataforma PR, la cual se construyó con dos grados de libertad (traslación X-Y). El computador sincroniza la adquisición de imágenes y los motores de traslación X-Y; además, permite el tratamiento de las imágenes adquiridas

para la reconstrucción 3D de la muestra.

El dispositivo de triangulación láser está diseñado para obtener información de la topografía del objeto. Es decir, para un posición (X,Y), sobre el plano de referencia, se extrae la coordenada Z. Ajustando la línea láser perpendicular al plano que forman los ejes ópticos de los sistemas de proyección y observación, se puede codificar la variable Z a partir de la deformación de la línea en dirección del

eje Y. Proyectando la línea sobre el plano de referencia, sin la presencia del objeto muestra, la imagen formada por el microscopio se ajusta a una línea recta. Ubicada la muestra, sobre el plano de referencia, la imagen es entonces una línea deformada con respecto a la línea de referencia ($Z=0$ mm); la deformación es proporcional a la profundidad de los puntos topográficos invadidos por la línea láser. Para el rango de inspección aplicado en este trabajo, el sistema óptico tiene un comportamiento donde la influencia de la no-telecentricidad del sistema óptico se puede despreciar; en este sentido, la profundidad de un punto de la muestra y la deformación de la línea láser siguen una relación lineal, representada por la siguiente ecuación:

$$Z = \Delta Y / \tan(\theta); \quad (1)$$

donde ΔY es la deformación de la línea láser con respecto a la imagen de la línea láser de referencia ($Z=0$ mm), θ es el ángulo entre los ejes ópticos proyección-observación y Z es la profundidad relativa al PR, de un punto de la muestra. Cuando se trabaje en un rango de influencia fuerte de la no-telecentricidad del sistema óptico, entonces la magnificación del sistema óptico es variante, en cuyo caso en la Ec.(1) se debe corregir incluyendo términos de orden superior. Desplazar la muestra y mantener centrada la línea láser sobre el eje del arreglo óptico de observación, es un procedimiento que permite minimizar la

influencia de la no-telecentricidad del sistema óptico; dentro de este criterio de trabajo la Ec.(1) se puede utilizar para extraer el parámetro topográfico de la muestra, a partir del parámetro óptico de deformación de la línea láser.

CURVAS DE CALIBRACION

Se asume que el ángulo entre los ejes de observación y proyección es medido con una precisión de error despreciable y que la influencia de la no-telecentricidad no interviene en la resolución deseada; entonces, la resolución del sistema estará definida como la menor altura que produciría un desplazamiento de la línea láser equivalente a un pixel en la imagen digitalizada. Aunque existen algoritmos que permiten obtener una resolución en subpixeles⁶, su implementación implica el conocimiento de otros parámetros, entre ellos el perfil gaussiano del haz, la influencia del Speckle, entre otros. Cuando los parámetros del sistema de triangulación (ángulos, factores de ampliación, etc..) son difíciles a determinar, o cuando se requiere mejorar la resolución en función del campo de observación, es importante obtener las curvas de calibración. El objetivo de estas curvas es la de transformar la variable óptica intermedia, deformación ΔY , en la variable a medir (profundidad Z), de tal forma que contengan las aproximaciones necesarias en función de la resolución deseada.

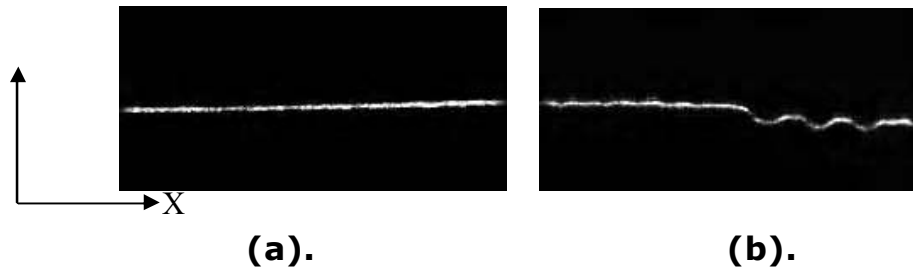


Figura 2. Imágenes de la línea láser digitalizada; posición $Z=0$ mm. (a): sin muestra; (b): con muestra.

La Fig.2.(a) es una imagen de la línea láser a $Z=0$ mm y la Fig.2.(b) es la imagen de la línea láser con deformación ΔY . Para cada imagen de la línea láser se obtiene la línea central.

Las curvas de calibración se obtienen desplazando, a intervalos regulares, el plano PR en dirección paralela al eje Z; la Fig.3 muestra las líneas centrales para las curvas de calibración del sistema óptico implementado.

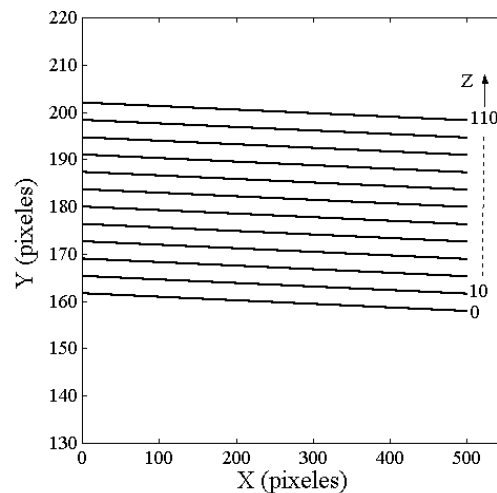


Figura 3. Curvas de calibración para el sistema óptico implementado. El parámetro Z en micras.

Para la reconstrucción de la topografía de una muestra, la línea central sobre la muestra se superpone con la Fig.3. Realizando una interpolación se puede determinar la altura a partir de la posición de la línea con respecto a las líneas de calibración. Indirectamente se incluye un posible comportamiento no lineal, en función de la altura. La Fig.3 se puede convertir en una figura 3D, si para una altura dada se desplaza la línea a diferentes posiciones Y;

también, en este caso se introduce un comportamiento no lineal con la posición (X,Y) . En nuestro caso, y para simplificar el tiempo de calculo, se demostró y utilizó un comportamiento lineal entre la altura y la deformación de la línea. Para cada posición de la línea sobre el eje Z se determinó la distancia, en pixeles, con respecto a la línea central a $Z=0$ mm. La Fig.4 muestra el comportamiento lineal obtenido.

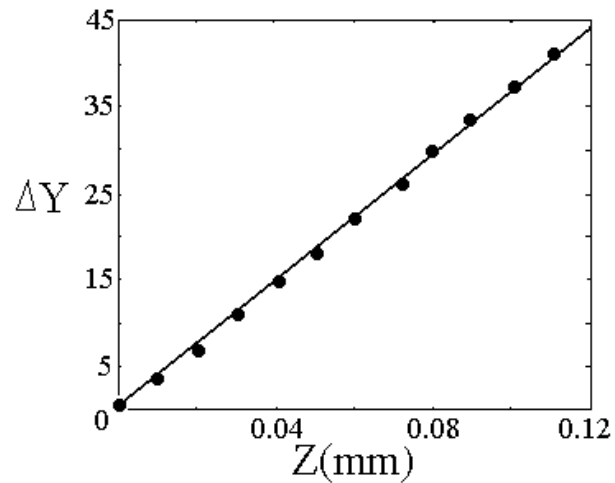


Figura 4. Relación lineal entre la deformación de la línea y la altura. El coeficiente de correlación entre los puntos experimentales es $\Delta Y/Z=368.51$ pixeles/mm.

ANÁLISIS EXPERIMENTAL

Usando un láser, de potencia 5 mW, se proyectó a una distancia de 50 mm una línea de luz de aproximadamente 0.020 mm de espesor. Un objetivo de 6.5 aumentos permitió formar la imagen de la línea sobre el cuerpo. Mediante la cámara CCD se registra una imagen de 512x512 pixeles; el campo de observación es de 9 mm². Las curvas

de calibración se obtuvieron a intervalos de 0.010 mm en un rango de 0 a 0.110 mm; estas curvas se muestran en la Fig.3.

Las muestras utilizadas para la valoración del sistema son monedas de \$500 y \$1000; de ellas se estudió una sección de 3x3 mm²; la sección estudiada se muestra en la Fig.5.

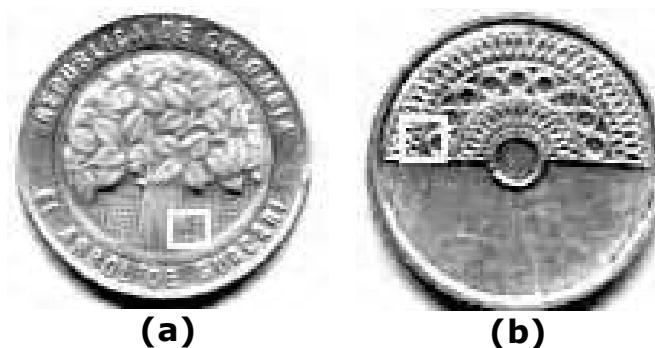
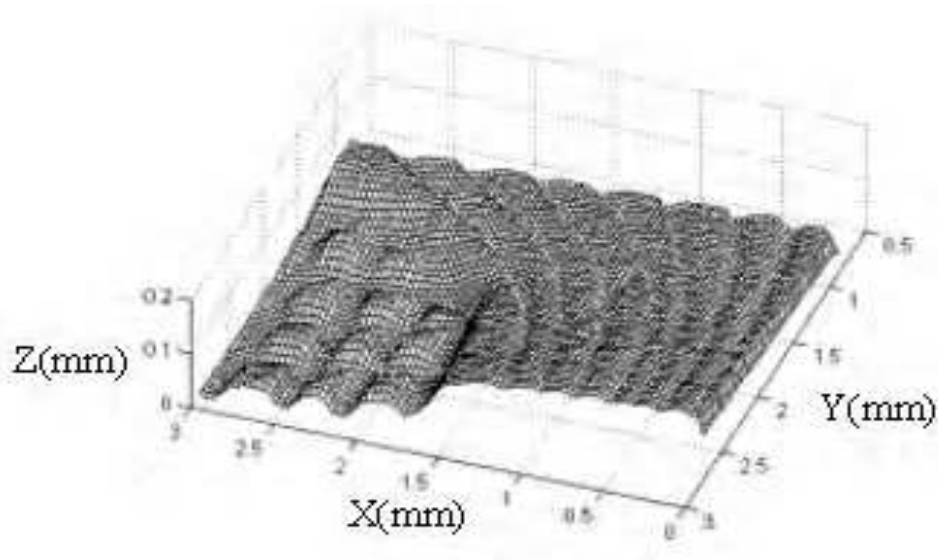


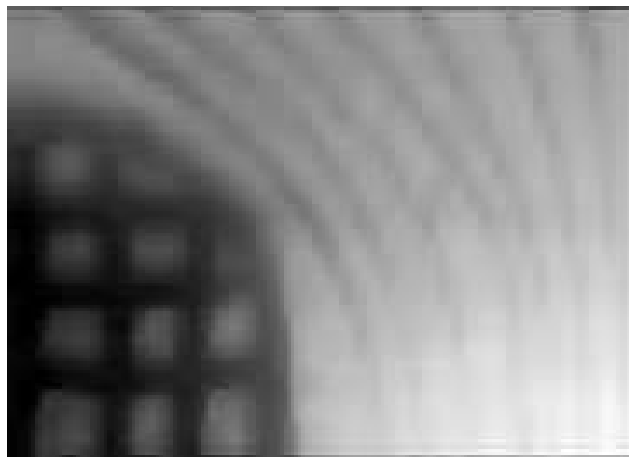
Figura 5. Secciones analizadas de las monedas; (a): moneda de \$500 y (b): moneda de \$1000.

Para cada posición de la línea láser sobre el eje Y, se obtiene la línea central de la imagen deformada; se calcula la distancia perpendicular entre los puntos de la línea central deformada y la línea central para $Z=0$ mm. Utilizando el coeficiente de

correlación de la Fig.4 se logra la reconstrucción de cada sección de las monedas. Las Figs.6 y 7 muestran dos representaciones de la sección reconstruida de las monedas de \$500 y \$1000, respectivamente.



(a)



(b).

Figura 6. Reconstrucción 3D de la sección de la moneda de \$500. (b): representación en escala de grises de (a).

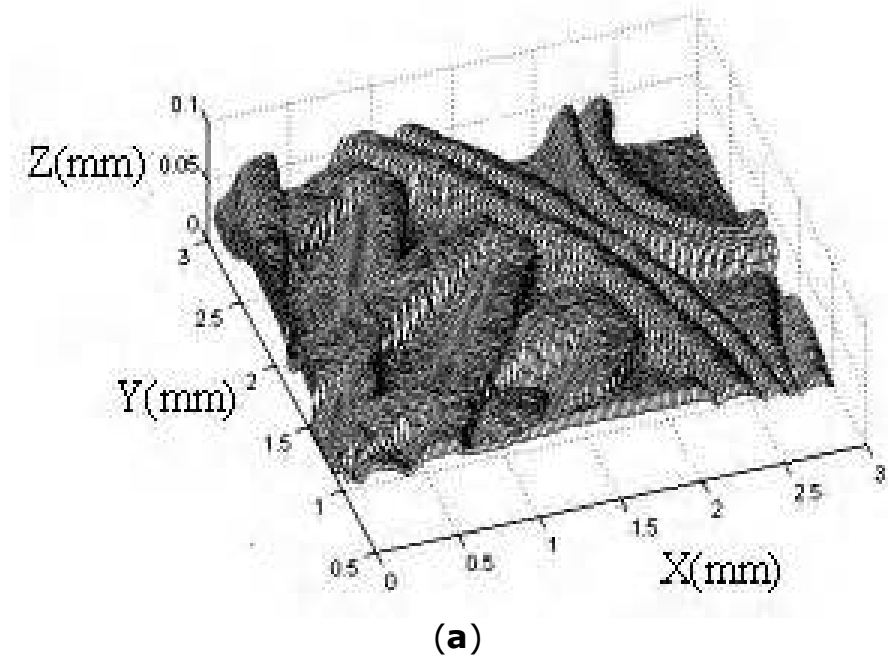


Figura 7. Reconstrucción 3D de la sección de la moneda de \$1000. (b): representación en escala de grises de (a).

CONCLUSIONES

Se implementó un sistema de reconstrucción 3D, dedicado al análisis de la topografía de objetos pequeños; con un campo de observación de 3x3

mm², una profundidad de detalle máximo de 110 micrones y una precisión del orden de micrón. Se demostró experimentalmente que la técnica de triangulación láser se puede utilizar para el análisis de la topografía

de objetos pequeños. El tratamiento de la información no requiere métodos numéricos sofisticados; en este sentido, el costo representado en tiempo computacional se reduce notablemente.

RECONOCIMIENTOS

El presente trabajo fue realizado en el Laboratorio de Óptica y Tratamiento de Señales, de la Escuela de Física de la Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga-Colombia.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

1. P. SANDOZ, G. TRIBILLON, H. PERRIN. High resolution profilometry by using phase calculation algorithms for spectroscopic analysis of white light interferograms, *Journal of Moderns Optics*, **43(4)**:701-708, 1996
2. P. SANDOZ. An algorithm for profilometry by white-light phase-shifting interferometry, *Journal of Moderns Optics*, **43(8)**:1545-1554, 1996
3. P. SANDOZ, G. TRIBILLON, T. GHARBI, R. DEVILLERS. Roughness measurement by confocal microscopy for brightness characterization and surface waviness visibility evaluation, *Wear*, **201**:186-192, 1996
4. M. COSTA. Surface inspection by an optical triangulation method, *Opt. Eng.*, **35(9)**: 2743-2747, 1996
5. M. RIOUX. Laser range finder based on synchronized scanners, *A. O.*, **23(21)**: 3837-3844, 1984
6. P. CIELO, M. LAMONTAGNE. Improvement of subpixel resolution in triangulation ranging by astigmatic spot projection and wide-aperture line array imaging, *Optics and Laser Technology*, **20(1)**: 19-24, 1988.