ISSN 0120 - 4211 Bistua Vol. 3 No. 1

ESTRUCTURA FUNDAMENTAL DEL ELECTRÓN RELATIVISTA

Beilinson A. A.[1]
Becerra A. R.[2]

[1]Department of Theoretical Physics Peoples' Friendship University of Russia
[2]Departamento de Física y Matemáticas Universidad de Pamplona, Colombia.

RESUMEN:

El comportamiento del electrón relativista es estudiado por medio del análisis de su velocidad y aceleración en intervalos de tiempo infinitesimales. Un nuevo método es usado consistente en el uso de la teoría de distribuciones, tomando como argumento de la función finita las magnitudes físicas ya mencionadas. Este comportamiento es llamado estructura fundamental del electrón.

ABSTRACT

The fundamental behavior of the relativistic electron is studied through the analysis of its speed and acceleration in infinitesimal intervals of time. The new method used here consists on using of distributions, taking the value of the studied magnitude as argument of the finite function. This behavior is called fundamental structure of the electron.

INTRODUCCIÓN

La teoría cuántica relativista de Dirac, a pesar de sus avances, hasta nuestros días no ha sido desarrollada por completo en forma satisfactoria. El problema de esta teoría se encaja en que en sus ecuaciones aparecen distribuciones, las cuales no pueden ser tratadas con aparato matemático convencional como son los operadores. En el presente trabajo se propone usar la teoría de distribuciones para el estudio de la solución fundamental de la ecuación de Dirac. Específicamente son estudiadas tanto la velocidad como la aceleración del electrón relativista en intervalos de tiempo infinitamente pequeños (velocidad y aceleración instantáneas), lo que se traduce como el comportamiento en una etapa fundamental, es decir su estructura fundamental.

Velocidad Instantánea

La ecuación de Dirac para el electrón libre es

$$i\gamma^0\left(\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - mI\right)\Psi = 0 \tag{1}$$

Esta ecuación, como es sabido, se utiliza para describir el estado del electrón relativista y de las partículas con espín ½. Sabemos que la solución fundamental de esta ecuación se comporta como función delta en intervalos de tiempo infinitamente pequeños, es decir

$$\gamma^0 D_{t,0} \overset{t\to 0}{\rightarrow} I\delta(x)\,, \tag{2}$$

donde está representada la solución fundamental por la función [Bogoliubov,1976]:

$$D_{t,0}(x) = \gamma^0\left(\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - imI\right)\times \left[\frac{\delta(t^2-x^2)}{2\pi} - \frac{m}{4\pi}\theta(t-x)\frac{J_1\left(m\sqrt{(t^2-x^2)}\right)}{(t^2-x^2)}\right], \tag{3}$$

aquí es la función de Dirac, la función de Bessel de primer orden, la función de Heaviside, las matrices de Dirac, y es una magnitud inversa a la longitud de onda de Compton. Como podemos ver es una distribución en forma matricial (funcional lineal sobre el espacio de las funciones finitas) [2];

Veamos ahora el problema sobre el valor de la velocidad instantánea del electrón de Dirac. Siendo la solución fundamental una distribución, debemos tratarla como tal, es decir para el caso del módulo de la velocidad del electrón estudiamos la integral del producto de la solución fundamental por una función finita que tiene como argumento la velocidad del electrón. Tenemos entonces:

$$\int D_{t,0}(x)\varphi(|\frac{x}{t}|)\,dx \overset{t\to 0}{\approx}$$

$$I\frac{\partial}{\partial t}\int \frac{\delta(t^2-x^2)}{2\pi}\varphi(|\frac{x}{t}|)dx =$$

$$I\frac{\partial}{\partial t}\int_0^\infty \frac{\delta(t^2-x^2)}{4\pi|x|}\varphi(|\frac{x}{t}|)d|x|^2 \int_{S_{|x|}} \varphi(|\frac{x}{t}|)dS_x(x) =$$

$$I\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{4\pi t}\varphi(1)\int_{S_{|x|}} dS_x(\tilde{x}) =$$

$$I\frac{\partial}{\partial t}t\varphi(1) \overset{t\to 0}{\rightarrow} I\varphi(1) \quad ,$$

es decir

$$\gamma^0 D_{t,0} \overset{t\to 0}{\rightarrow} I\delta(v-1), \tag{4}$$

donde 1 es en realidad c, la velocidad de la luz (desde un principio estamos trabajando en un sistema de unidades en el cual c = 1).

De lo anterior podemos concluir que la velocidad instantánea del electrón es siempre igual con exactitud a la velocidad de la luz, lo cual no debe parecernos sorprendente, pues esta velocidad se define en la solución fundamental $D_{t,0}(x)$ por la parte correspondiente al neutrino.

Aceleración Instantánea

Estudiemos ahora el problema de la aceleración instantánea del electrón de Dirac. Para ello analicemos el producto de dos funciones de Green consecutivas $D_{\tau,0}(x)$ y $D_{t,\tau}(x)$ como funciones de x_τ ($0 \le \tau \le t$):

$$\int D_{t,\tau}\gamma^0 D_{\tau,0}\varphi(a)dx_\tau \tag{5}$$

donde la aceleración del electrón está dada por la fórmula clásica

$$a = \frac{\frac{x_t - x_\tau}{t-\tau} - \frac{x_\tau}{\tau}}{t} \tag{6}$$

El soporte de esta distribución está representado en la figura 1 y es la intersección de dos esferas tridimensionales de radio t, que representan los soportes de las dos distribuciones correspondientes.

Usando (3) en la integral (5) y llevando a cabo el respectivo producto podemos ordenar los sumandos resultantes en los siguientes grupos: como primero aparece una parte singular de esta distribución, que se representa por la integral a lo largo del borde de la "lente" formada por la intersección de las dos esferas. Como segundo aparece otra parte singular representada por la integral de las superficies laterales que limitan la lente. Y por último aparece una parte regular de esta distribución que se representa por la integral de volumen de la parte interior de la llente.

Hay que subrayar que las funciones base de esta distribución, son funciones finitas.

Estudiemos más detalladamente la estructura de la integral que va por el borde de la lente. Para ello pasamos a un sistema de coordenadas en el cual tenemos tres vectores base: el primero está dirigido en dirección del radio de la primera esfera, el segundo en dirección del radio de la segunda esfera, y el tercero tiene dirección de la tangente a la circunferencia que representa el borde de la lente. Como los radios no son ortogonales, el elemento de volumen es $dx_\tau = sen\,\alpha dx_1 dx_2 dx_3$, donde α es el ángulo entre los radios de tal manera que el $sen\,\alpha$ es el Jacobiano de la transformación. Entonces como resultado, dejando solamente el miembro principal, la integral (5) queda de la forma:

$$\frac{\partial^2}{\partial\tau\partial(t-\tau)}\int \gamma^0 \frac{sen\alpha}{(4\pi)^2\,\tau(t-\tau)}\varphi(a)dx_\tau \qquad (7)$$

donde se integra solamente la lente. El radio de esta circunferencia es

$$\frac{\tau(t-\tau)sen\alpha}{x_t - x_0} \qquad (8)$$

además $sen\,\alpha \to 0$ cuando $t \to 0$, que es consecuencia de lo que se había mencionado anteriormente: la velocidad instantánea del electrón de Dirac es igual a la velocidad de la luz. Por esto mismo, $(sen\,\alpha)/t$, cuando $t \to 0$ se puede interpretar como la velocidad angular, la cual, como se puede ver, es infinitamente grande.

Podemos observar que la distribución (5) no está normada, es decir que cuando $t \to 0$ ella no es función delta del argumento x_τ . Por eso introduzcamos una construcción matemática modificada que contenga esta propiedad. En lugar de (7) entonces puede estar la expresión:

$$\gamma^0 \frac{1}{2\pi r}\int \varphi(x_\tau)dx_\tau \xrightarrow{t\to 0} \gamma^0\varphi(0) \qquad (9)$$

donde la integración se lleva a cabo en la circunferencia de radio r. Por eso

$$\gamma^0 \frac{1}{2\pi r}\int \varphi([a])dx_\tau \xrightarrow{t\to 0} \gamma^0\varphi(\infty) \qquad (10)$$

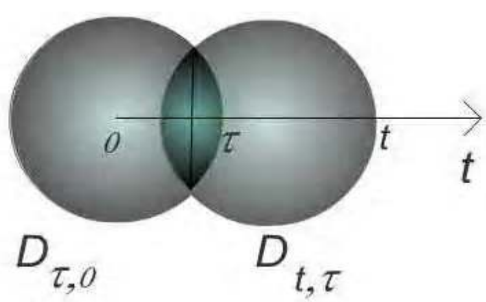

fig1. Soporte de el producto de las dos distribuciones, representado por la "lente esférica" formada por la intersección de los dos soportes correspondientes a las dos distribuciones. Cada solución fundamental es una esfera tridimensional de radio igual al intervalo de tiempo.

Cuando $t \to 0$ la integral (10) desaparece ($\varphi(\infty) = 0$, ya que es una función finita.) . Teniendo en cuenta la ecuación inicial (5) y el resultado (10), vemos que el valor absoluto de la aceleración del electrón se hace infinito.

CONCLUSIONES

De (4) y (10) podemos llegar a una importante conclusión: El electrón de Dirac se mueve con una velocidad instantánea exactamente igual a la velocidad de la luz; además en cada instante de tiempo esta velocidad cambia su dirección con una velocidad angular infinita. En otras palabras el electrón está girando con velocidad de la luz sobre una esfera de un radio infinitamente pequeño (comparar con el fenómeno conocido como Zitterbewegung). Precisamente este resultado caracteriza la estructura fundamental del electrón de Dirac, y la estructura espacio-tiempo de la solución de la ecuación de Dirac. Esta estructura es invariante con respecto a las transformaciones de Lorentz.

En el caso de la mecánica cuántica no relativista, en su forma euclidiana, una estructura análoga aparece en el hecho de que la medida de Wiener está concentrada en funciones continuas pero no diferenciables. Es decir, la velocidad de esa partícula en cada momento, en módulo, es infinitamente grande.

De esta manera se ha estudiado el comportamiento del electrón en intervalos de tiempo infinitamente pequeños usando las propiedades de las de las distribuciones para el problema dado. Cabe resaltar que este método, en el cual se usa el argumento de la función finita para estudiar el comportamiento de la solución fundamental en casos específicos, puede ser utilizado en la solución de otros problemas diferentes a los ya resueltos en el presente artículo.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

· N. N. Bogoliubov, D. B. Shirkov. Introduction to theory of quantum fields (Rus) // Moscow, 1976
· I. M. Gelfand, G. E. Shilov. Generalized functions (Rus), Tom 1 // Moscow, Fitmatguis, 1958.
· I. M. Gelfand, N. I. Vilenkin. Generalized functions (Rus) Tom 4 // Moscow, Fitmatguis 1961.
· A. A. Beilinson, A. Becerra. Space-time structure of the Dirac equation // Vestnik R. P. F. University, series Physics 2001, No. 9, pag. 51-55.