

---

# Un Panorama De La Óptica De Fourier Fraccionaria Resultados Recientes Y Aplicaciones

**Pierre Pellat-Finet**

*Grupe d'Optique Théorique et Appliquée;  
Laboratoire de Mathématiques et Applications des Mathématiques  
Université de Bretagne Sud, B.P. 92116, 56321, Lorient cedex, -France-*

---

## RESUMEN

Las integrales de Fresnel, tales como se utilizan en la teoría escalar de la difracción de la luz, incluyen el núcleo de Fourier y términos de fase cuadrática; corresponden a la noción de transformación de Fourier fraccionaria, la cual generaliza la transformación de Fourier estándar. El uso de la transformación de Fourier fraccionaria permite representar los fenómenos de difracción en una forma a la vez sintética y operacional, y por lo tanto lleva a un método de estudio original que constituye la doctrina de la óptica de Fourier fraccionaria de la cual se presentan los elementos básicos. Se muestra en particular como se puede trabajar con haces elípticos; y también como la teoría se aplica al estudio de los resonadores ópticos.

**Palabras Clave:** Óptica metaxial, Difracción, Transformada de Fourier Fraccionaria, Formación de Imágenes, Haces astigmáticos, Resonadores ópticos inestables.

---

## ABSTRACT

Fresnel integrals, as used in the scalar theory of diffraction, include the Fourier nucleus as well as quadratic phase factors and correspond to the notion of fractional order Fourier transform, a generalization of the usual Fourier transform. The fractional Fourier transform affords a synthetical and operational way of dealing with diffraction phenomena and leads to original methods that constitute a doctrine in itself: fractional Fourier optics. Main features of the theory are exposed here, with an emphasis on astigmatic surfaces and applications to instable optical resonator theory.

**Keywords:** Metaxial optics, Diffraction, Fractional order Fourier transform, Image formation, Astigmatic surfaces, Instable optical resonators.

---

## 1. INTRODUCCIÓN

Desde 1993, la transformación de Fourier de orden fraccionario ha recibido una gran atención por parte de la comunidad científica, esencialmente a través de aplicaciones a la óptica y al tratamiento de señales. De punto de vista matemático, esa transformación aparece en un trabajo de Wiener<sup>1</sup> de 1929 y figura en artículos de Condon<sup>2</sup>, de Kober<sup>3</sup> y de Patterson<sup>4</sup>. Namias la utilizó en 1980 para resolver unas ecuaciones diferenciales parciales de la mecánica cuántica<sup>5,6</sup>. Parece que la primera aplicación a la óptica se debe a Khare<sup>7</sup>. No hay dudas sin embargo que su desarrollo actual en óptica y tratamiento de señales resulta de los trabajos iniciales de Mendlovic, Ozaktas<sup>8,9</sup> y Lohmann<sup>10</sup>. Aunque no figura en los primeros trabajos de esos autores, la posibilidad de describir la propagación de la luz en el espacio libre fue notada desde esa época<sup>11-13</sup>.

Existen varios modos de asociación entre un fenómeno de difracción (propagación en el espacio libre) y una transformación de Fourier fraccionaria. El método que proponemos es distinto a los de muchos autores<sup>12,14</sup> y se justifica por la necesidad de cumplir con el principio de Huygens-Fresnel<sup>15,16</sup>, como se explicará brevemente. Se funda además sobre la óptica metaxial de G. Bonnet<sup>16-18</sup>, una teoría espacio-temporal de la difracción que representa una alternativa a la óptica de Fourier clásica<sup>19</sup>. La transformación de Fourier de orden fraccionario ofrece un cálculo operacional que se adapta particularmente bien a la óptica metaxial, y los trabajos que se van a describir se ubican claramente en el marco metaxial.

Se encontrará en el presente artículo una reseña de la óptica de Fourier fraccionaria, limitada a la asociación entre difracción y transformación de Fourier fraccionaria y al fenómeno de imagen coherente que constituyen los elementos básicos de la teoría. Se explicará luego el interés del método para describir los sistemas astigmáticos. La óptica metaxial utiliza emisores y receptores esféricos, y constituye de hecho una herramienta eficaz para abordar la teoría de los resonadores ópticos, compuestos precisamente por espejos esféricos. Se mostrará que la óptica de Fourier fraccionaria ofrece un marco teórico unitario para el estudio tanto de los resonadores estables como de los inestables; y se ilustrará cómo encontrar las ondas esféricas que se propagan en un resonador inestable.

## 2. DIFRACCIÓN Y TRANSFORMACIÓN DE FOURIER FRACCIONARIA

### 2.1. La transformación de Fourier fraccionaria

Sea  $\alpha$  un número complejo y  $f$  una función de una variable vectorial  $\rho$  de dos dimensiones. Si  $\rho = (\xi, \eta)$ , se denota  $\rho = \|\rho\| = (\xi^2 + \eta^2)^{1/2}$  y  $d\rho = d\xi d\eta$ . El producto escalar euclidiano de  $\rho$  y  $\sigma$  se denota  $\rho \cdot \sigma$ . La transformada de Fourier fraccionaria de orden  $\alpha$  de la función  $f$  se define por<sup>5,6,16</sup>

$$\mathcal{F}_\alpha[f](\sigma) = \frac{ie^{-i\alpha}}{\text{sen } \alpha} e^{-i\pi\sigma^2 \cot \alpha} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i\pi\rho^2 \cot \alpha} \exp\left[\frac{2i\pi}{\text{sen } \alpha} \rho \cdot \sigma\right] f(\rho) d\rho. \quad (1)$$

La principales propiedades de la transformación de Fourier fraccionaria son:

1.  $\mathcal{F}_0$  es el operador identidad y  $\mathcal{F}_{\pi/2}$  es la transformación de Fourier estándar;
2. Composición de dos transformaciones de Fourier fraccionarias:  $\mathcal{F}_\alpha \circ \mathcal{F}_\beta = \mathcal{F}_{\alpha+\beta}$ ;
3. La transformación inversa de  $\mathcal{F}_\alpha$  es  $[\mathcal{F}_\alpha]^{-1} = \mathcal{F}_{-\alpha}$ ;
4. Continuidad de la transformación de Fourier fraccionaria con respecto a su orden. Para cualquier función  $f$ , se tiene:  $\mathcal{F}_\alpha[f] \rightarrow \mathcal{F}_\beta[f]$ , si  $\alpha \rightarrow \beta$ ;
5. Periodicidad:  $\mathcal{F}_{\alpha+\pi}[f](\sigma) = \mathcal{F}_\alpha[f](-\sigma)$  y  $\mathcal{F}_{\alpha+2\pi} = \mathcal{F}_\alpha$ .
6. Las funciones propias de las transformaciones de Fourier fraccionarias son las funciones de Hermite-Gauss, de la forma  $H_m(\xi)H_n(\eta) \exp[-(\xi^2 + \eta^2)/w^2]$  donde  $w$  es una constante y  $H_n$  el polinomio de Hermite de orden  $n$ .

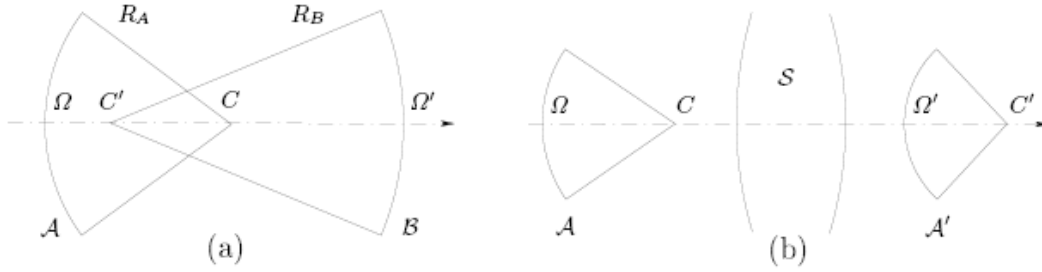
En una dimensión, la transformación de Fourier fraccionaria se define por ( $\mathfrak{s}(\alpha)$  es el signo de  $\alpha$ )

$$\mathcal{F}_\alpha^{(1)}[f](\eta) = \frac{e^{i\mathfrak{s}(\alpha)\pi/4} e^{-i\alpha/2}}{\sqrt{|\text{sen } \alpha|}} e^{-i\pi\eta^2 \cot \alpha} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\pi\xi^2 \cot \alpha} \exp\left[\frac{2i\pi\xi\eta}{\text{sen } \alpha}\right] f(\xi) d\xi. \quad (2)$$

## 2.2. Difracción

Sea un emisor coherente  $\mathcal{A}$ , esférico<sup>16</sup> (casquete esférico), de vértice  $\Omega$  y centro de curvatura  $C$  (fig. 1 a). Su radio de curvatura es  $R_A = \overline{\Omega C}$ . Si se eligen coordenadas cartesianas  $x$  e  $y$  en el plano  $\mathcal{P}$  tangente a  $\mathcal{A}$  en  $\Omega$ , un punto  $M$  de  $\mathcal{A}$  se ubica por la coordenadas  $x_m$  e  $y_m$  de su proyección  $m$  sobre  $\mathcal{P}$ . Es decir,  $M$  se representa por el vector  $\mathbf{r} = \overline{\Omega m} = (x_m, y_m)$ . En adelante no se escribe más el índice  $m$ .

En una teoría escalar, la amplitud del campo (eléctrico) en  $M$  en el tiempo  $t$  se escribe  $E(M, t) = U(M) e^{2i\pi\nu_0 t}$ , donde  $\nu_0$  es la frecuencia de la onda. En lo siguiente se utilizará solamente  $U(M)$  y no se escribirá más el factor temporal. La amplitud  $U(M)$  del campo en el punto  $M$  del emisor  $\mathcal{A}$  de coordenadas  $\mathbf{r}$ , se denota  $U_A(\mathbf{r})$ .



**Figura 1.** (a) Difracción de un emisor esférico  $\mathcal{A}$  hacia un receptor esférico  $\mathcal{B}$ . (b) Imagen coherente: el casquete esférico  $\mathcal{A}'$  es la imagen coherente del casquete  $\mathcal{A}$  si, y solamente si,  $\Omega'$  es la imagen paraxial de  $\Omega$ , y  $C'$  la imagen paraxial de  $C$ .

Sea  $\mathcal{B}$  un receptor esférico, de vértice  $\Omega'$ , y radio de curvatura  $R_B$ . La distancia de  $\mathcal{A}$  a  $\mathcal{B}$  es  $D = \overline{\Omega\Omega'}$  (de vértice a vértice). La transferencia del campo por difracción del campo de  $\mathcal{A}$  a  $\mathcal{B}$  se escribe ( $\lambda$  es la longitud de onda)

$$U_B(s) = \frac{i}{\lambda D} \exp\left[-\frac{i\pi}{\lambda} \left(\frac{1}{R_B} + \frac{1}{D}\right) s^2\right] \int_{\mathbb{R}^2} \exp\left[-\frac{i\pi}{\lambda} \left(\frac{1}{D} - \frac{1}{R_A}\right) r^2\right] \exp\left[\frac{2i\pi}{\lambda D} s \cdot r\right] U_A(\mathbf{r}) d\mathbf{r}. \quad (3)$$

Si  $R_A = D$ , se tiene un fenómeno de difracción de Fraunhofer: la integral es la transformada de Fourier (estándar) de la amplitud  $U_A$ , considerada en el punto  $s/\lambda D$ . Sino, es un fenómeno de difracción de Fresnel.

## 2.3. Orden de la transformación de Fourier fraccionaria asociada con un fenómeno de difracción

Existe una analogía formal entre las relaciones (1) y (3) debido a la presencia del núcleo de Fourier y los términos de fase cuadrática. Luego se plantea el problema de expresar la relación (3) por medio de una transformación de Fourier fraccionaria, y por eso hay que encontrar el orden  $\alpha$  adecuado, y las variables escaladas adaptadas.

Sea  $J$  definido por<sup>15,20</sup>

$$J = \frac{(D + R_B)(R_A - D)}{D(D - R_A + R_B)}. \quad (4)$$

Si  $J \geq 0$ , se dice que la transferencia del campo de  $\mathcal{A}$  a  $\mathcal{B}$  es de orden real y se elige  $\alpha$  por

$$\cot^2 \alpha = J, \quad -\pi < \alpha < \pi, \quad \alpha D \geq 0, \quad (5)$$

el signo de  $\cot \alpha$  siendo el signo de  $R_A D (R_A - D)$ .

Si  $J < 0$ , la transferencia es de orden complejo y para tener  $\cot^2 \alpha = J$ , se elige  $\alpha$  de la manera siguiente:

- si  $J < -1$ , se elige  $\alpha = i\beta$ , donde  $\beta$  es un número real positivo tal que  $\coth^2 \beta = -J$ ;
- si  $-1 < J < 0$ , se elige  $\alpha = s'\pi/2 + i\beta$ , donde  $s'$  es el signo de  $D$  y  $\coth^2 \beta = -1/J$ .

## 2.4. Variables escaladas para una transferencia de orden real

Se introduce el parámetro auxiliar  $\varepsilon$  tal que

$$\varepsilon = \frac{D}{R_A - D} \cot \alpha. \quad (6)$$

Se tiene  $\varepsilon R_A > 0$  y

$$\varepsilon^2 = \frac{D(D + R_B)}{(R_A - D)(D - R_A + R_B)}. \quad (7)$$

Si  $r$  y  $s$  son las variables espaciales respectivas sobre  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$ , las variables escaladas correspondientes son

$$\rho = \frac{r}{\sqrt{\lambda \varepsilon R_A}}, \quad \sigma = \frac{s}{\sqrt{\lambda \varepsilon R_A}} (\cos \alpha + \varepsilon \sin \alpha). \quad (8)$$

Se definen las amplitudes escaladas sobre  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  por

$$V_A(\rho) = U_A \left( \sqrt{\lambda \varepsilon R_A} \rho \right), \quad V_B(\sigma) = U_B \left( \frac{\sqrt{\lambda \varepsilon R_A}}{\cos \alpha + \varepsilon \sin \alpha} \sigma \right), \quad (9)$$

de tal manera que la relación (3) se escribe

$$V_B(\sigma) = e^{i\alpha} (\cos \alpha + \varepsilon \sin \alpha) \mathcal{F}_\alpha[V_A](\sigma). \quad (10)$$

La relación (10) representa la difracción de  $\mathcal{A}$  a  $\mathcal{B}$  en la forma de una transformación de Fourier fraccionaria. Esa representación tiene las dos propiedades básicas siguientes:

- *Continuidad.* La propagación es un fenómeno continuo en el sentido que, cerca del emisor, no hay difracción, y la transformación asociada se reduce luego al operador identidad. Se nota que si  $D = 0$ , las relaciones (4) y (5) llevan a  $\alpha = 0$ , y la transformación fraccionaria asociada es  $\mathcal{F}_0$ , es decir, el operador identidad. Si  $D = R_A$ , se obtiene  $\alpha = \pi/2$ , y la transformación fraccionaria asociada es  $\mathcal{F}_{\pi/2}$ , es decir, la transformación de Fourier estándar. Si  $0 < D < R_A$ , se tiene  $0 < \alpha < \pi/2$ , y si  $D$  varía de 0 a  $R_A$ , el orden  $\alpha$  varía de 0 a  $\pi/2$ , de tal modo que la continuidad de la propagación se representa bien por la continuidad de  $\mathcal{F}_\alpha$  con respecto a  $\alpha$ .
- *Compatibilidad con el principio de Huygens-Fresnel.* Si  $\mathcal{C}$  es una superficie intermedia entre  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$ , la transferencia del campo de  $\mathcal{A}$  a  $\mathcal{B}$  se puede concebir como la composición de dos fenómenos de difracción: uno de  $\mathcal{A}$  a  $\mathcal{C}$ , el otro de  $\mathcal{C}$  a  $\mathcal{B}$ . Si el primer fenómeno se representa por  $\mathcal{F}_{\alpha_1}$  y el segundo por  $\mathcal{F}_{\alpha_2}$ , la transferencia de  $\mathcal{A}$  a  $\mathcal{B}$  se debe representar por  $\mathcal{F}_\alpha = \mathcal{F}_{\alpha_2} \circ \mathcal{F}_{\alpha_1} = \mathcal{F}_{\alpha_1 + \alpha_2}$ , es decir  $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ . Se muestra que la manera anterior de elegir  $\alpha$  y las variables escaladas es compatible con esa exigencia<sup>15,16</sup>.

Notación: para sintetizar la correspondencia entre las variables espaciales y las variables escaladas, y introducir a los parámetros  $\alpha$  y  $\varepsilon$  asociados con un fenómeno de difracción, se escribe

$$(R_A, R_B, D, r, s, U_A, U_B) \rightsquigarrow (\alpha, \varepsilon, \rho, \sigma, V_A, V_B). \quad (11)$$

## 2.5. Variables escaladas para una transferencia de orden complejo

Se define de nuevo  $\varepsilon$  por la relación (6), pero como  $J < 0$ ,  $\cot \alpha$  es imaginario y  $\varepsilon$  es imaginario también<sup>20</sup>. Se introduce  $\chi$  tal que  $\chi R_A > 0$  y  $\chi = \mathfrak{s}i\varepsilon$  donde  $\mathfrak{s}$  es el signo de  $DR_A(R_A - D)$ . Las variables escaladas son

$$\rho = \frac{1 + \mathfrak{s}i}{\sqrt{2\lambda\chi R_A}} r, \quad \sigma = \frac{1 + \mathfrak{s}i}{\sqrt{2\lambda\chi R_A}} (\cos \alpha + \varepsilon \sin \alpha) s, \quad (12)$$

y las amplitudes escaladas

$$V_A(\rho) = U_A \left( \frac{1 - \mathfrak{s}i}{\sqrt{2}} \sqrt{\lambda\chi R_A} \rho \right), \quad V_B(\sigma) = U_B \left( \frac{(1 - \mathfrak{s}i)\sqrt{\lambda\chi R_A} \sigma}{\sqrt{2} (\cos \alpha + \varepsilon \sin \alpha)} \right). \quad (13)$$

Sea  $\Gamma = (1 + \mathfrak{s}i)\mathbb{R} \times (1 + \mathfrak{s}i)\mathbb{R}$  el conjunto de las pares de la forma  $((1 + \mathfrak{s}i)x, (1 + \mathfrak{s}i)y)$ , donde  $x$  e  $y$  son números reales. La relación (3) se escribe

$$V_B(\sigma) = i \frac{\cos \alpha + \varepsilon \operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} e^{-i\pi\sigma \cdot \sigma \cot \alpha} \int_{\Gamma} e^{-i\pi\rho \cdot \rho \cot \alpha} \exp \left[ \frac{2i\pi\sigma \cdot \rho}{\operatorname{sen} \alpha} \right] V_A(\rho) d\rho, \quad (14)$$

donde el producto  $\sigma \cdot \rho$  es la extensión compleja formal del producto escalar euclidiano:  $\sigma \cdot \rho = \xi\tau + \eta\zeta$  si  $\rho = (\xi, \eta)$  y  $\sigma = (\tau, \zeta)$ , donde  $\xi, \eta, \tau$  y  $\zeta$  son números complejos.

Si las funciones  $V_A$  y  $V_B$  tienen extensiones holomórficas, si  $V_A$  no tiene polo y satisface a las condiciones de Jordan al infinito, la integral sobre  $\Gamma$  se puede remplazar por una integral sobre  $\mathbb{R}^2$  en la forma

$$V_B(\sigma) = i \frac{\cos \alpha + \varepsilon \operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} e^{-i\pi\sigma \cdot \sigma \cot \alpha} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i\pi\rho \cdot \rho \cot \alpha} \exp \left[ \frac{2i\pi\sigma \cdot \rho}{\operatorname{sen} \alpha} \right] V_A(\rho) d\rho. \quad (15)$$

En la relación (15), la variable  $\rho$  es una variable vectorial real de dos dimensiones, de tal manera que la parte derecha de esa relación representa la extensión a  $\mathbb{C}^2$  de la transformada de Fourier fraccionaria de orden  $\alpha$  de  $V_A$ . Se obtiene

$$V_B(\sigma) = e^{i\alpha} (\cos \alpha + \varepsilon \operatorname{sen} \alpha) \mathcal{F}_{\alpha}[V_A](\sigma). \quad (16)$$

Formalmente, la relación (16) es igual a la relación (10). De hecho, hay diferencias entre esas dos relaciones: en (16), el orden  $\alpha$  es complejo; la variable escalada  $\sigma$  es compleja, de tal manera que  $V_B$  es la continuación holomórfica, sobre  $\Gamma$ , de  $V_B$  de la relación (10).

Puesto que la transformación  $\mathcal{F}_0$  es la identidad, y que  $\mathcal{F}_{\pi}$  es la identidad con un cambio de signo de la variable, se escribe

$$V_{A'}(\rho') = \frac{1}{g_v} \mathcal{F}[V_A](\rho') \text{ si } g_v > 0, \quad \circ \quad V_{A'}(\rho') = \frac{1}{g_v} \mathcal{F}[V_A](-\rho') \text{ si } g_v < 0. \quad (18)$$

#### 4. SISTEMAS ASTIGMÁTICOS

En general, una superficie regular  $\mathcal{S}$ , admite en cada punto  $M$ , dos curvaturas principales, con radios de curvatura  $R_1$  y  $R_2$ . Con coordenadas ortogonales  $x_1$  y  $x_2$  en el plano tangente a  $\mathcal{S}$  en  $M$  y en las secciones de curvaturas principales, si  $x_3$  está en la dirección de la normal, la ecuación local de  $\mathcal{S}$  se escribe, al segundo orden,

$$x_3 = \frac{x_1^2}{R_1} + \frac{x_2^2}{R_2}. \quad (19)$$

Sea un emisor  $\mathcal{A}$  y un receptor  $\mathcal{B}$  a la distancia  $D$ . La difracción de  $\mathcal{A}$  a  $\mathcal{B}$  se traduce por

$$U_B(M') = \frac{i}{\lambda D} \int_{\mathcal{A}} U_A(M) \exp \left[ -\frac{2i\pi M M'}{\lambda} \right] dM. \quad (20)$$

Con coordenadas  $x_1, x_2$  sobre  $\mathcal{A}$  y  $x'_1, x'_2$  sobre  $\mathcal{B}$ , se escribe

$$U_B(x'_1, x'_2) = \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{\lambda D}} \exp \left[ -\frac{i\pi}{\lambda} x_2'^2 \left( \frac{1}{R_2'} + \frac{1}{D} \right) \right] \int_{\mathbb{R}^2} \exp \left[ -\frac{i\pi}{\lambda} x_2^2 \left( \frac{1}{D} - \frac{1}{R_2} \right) \right] \exp \left[ \frac{2i\pi}{\lambda D} x_2' x_2 \right] W(x'_1, x_2) dx_2, \quad (21)$$

donde

$$W(x'_1, x_2) = \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{\lambda D}} \exp \left[ -\frac{i\pi}{\lambda} x_1'^2 \left( \frac{1}{R_1'} + \frac{1}{D} \right) \right] \int_{\mathbb{R}^2} \exp \left[ -\frac{i\pi}{\lambda} x_1^2 \left( \frac{1}{D} - \frac{1}{R_1} \right) \right] \exp \left[ \frac{2i\pi}{\lambda D} x_1' x_1 \right] U_A(x_1, x_2) dx_1. \quad (22)$$

Cada integral se puede representar por una transformación de Fourier fraccionaria en una dimensión. Se introducen los parámetros  $\alpha_j$  y  $\varepsilon_j$  ( $j = 1, 2$ ) tales que

$$\cot^2 \alpha_j = J_j = \frac{(D + R'_j)(R_j - D)}{D(D - R_j + R'_j)}, \quad \varepsilon_j^2 = \frac{D(D + R'_j)}{(R_j - D)(D - R_j + R'_j)}, \quad (23)$$

y las variables escaladas (en una dimensión)

$$\xi_j = \frac{1}{\sqrt{\lambda \varepsilon_j R_j}} x_j, \quad \xi'_j = \frac{1}{\sqrt{\lambda \varepsilon_j R_j}} (\cos \alpha_j + \varepsilon_j \sin \alpha_j) x'_j, \quad (24)$$

y las amplitudes escaladas  $V_A$  y  $V_B$  correspondientes.

Finalmente, la difracción de  $\mathcal{A}$  a  $\mathcal{B}$  se escribe

$$V_B(\xi'_1, \xi'_2) = e^{i(\alpha_1 + \alpha_2)/2} (\cos \alpha_1 + \varepsilon_1 \sin \alpha_1)^{1/2} (\cos \alpha_2 + \varepsilon_2 \sin \alpha_2)^{1/2} \mathcal{F}_{\alpha_2}^{(1)} [\mathcal{F}_{\alpha_1}^{(1)} [V_A]](\xi'_1, \xi'_2). \quad (25)$$

La transformación de Fourier fraccionaria está bien adaptada al análisis de emisores o receptores astigmáticos, porque permite un tratamiento separado de las variables espaciales (según las secciones principales).

La iluminación sobre  $\mathcal{B}$ , no cambia si se cambian los radios de curvaturas  $R'_1$  y  $R'_2$ . Es posible luego elegir por ejemplo  $R'_2$  de tal manera que  $\alpha_1 = \alpha_2$ . En este caso la composición  $\mathcal{F}_{\alpha_2}^{(1)} [\mathcal{F}_{\alpha_1}^{(1)}]$  no es más sino la transformación de Fourier fraccionaria de orden  $\alpha_1$  en dos dimensiones. Se tiene

$$V_B(\xi'_1, \xi'_2) = e^{i\alpha_1} (\cos \alpha_1 + \varepsilon_1 \sin \alpha_1) \mathcal{F}_{\alpha_1} [V_A](\xi'_1, \xi'_2). \quad (26)$$

Si se adaptan los radios de curvatura de  $\mathcal{B}$ , la figura de difracción de  $\mathcal{A}$  se calcula, en el dominio fraccionario, como si  $\mathcal{A}$  fuera esférico. Cuando se pasa del dominio fraccionario al dominio físico, hay una anamorfosis sobre las variables, y luego sobre la figura de difracción. Se concluye que la figura de difracción de un emisor astigmático se deduce de la figura de difracción de un emisor esférico de misma abertura por una anamorfosis.

## 5. RESONADORES ÓPTICOS

### 5.1. Transferencia de ida y vuelta en un resonador

Se consideran resonadores ópticos constituidos por dos espejos esféricos  $\mathcal{M}_1$  y  $\mathcal{M}_2$ . Para aplicar las fórmulas de la difracción, se asocian dos radios de curvatura a un espejo: un radio de curvatura objeto,  $R$ , tomado del vértice  $\Omega$  al centro de curvatura  $C$ , pero con el signo positivo según la dirección de propagación de la luz antes de la reflexión, es decir, en el espacio objeto; y un radio de curvatura imagen,  $R'$ , tomado también del vértice  $\Omega$  hasta el centro de curvatura  $C$ , pero con el signo positivo según la dirección de propagación de la luz después de la reflexión, en el espacio imagen. Se tiene  $R' = -R$ . Los radios de  $\mathcal{M}_1$  son  $R_1$  y  $R'_1$ ; los de  $\mathcal{M}_2$  son  $R_2$  y  $R'_2$ .

Para la transferencia del campo de ida de  $\mathcal{M}_1$  a  $\mathcal{M}_2$  se consideran los radios  $R'_1$  y  $R_2$ , porque la luz se aleja de  $\mathcal{M}_1$  y se acerca a  $\mathcal{M}_2$ , de tal modo que el haz luminoso se considera después de la reflexión sobre  $\mathcal{M}_1$  y antes de la reflexión sobre  $\mathcal{M}_2$ . Esa transferencia se define por  $(R'_1, R_2, D, r, s, U_1, U_2) \leftrightarrow (\alpha_1, \varepsilon_1, \rho_1, \sigma_1, V_1, V_2)$  y se describe por

$$V_2(\sigma_1) = e^{i\alpha_1} (\cos \alpha_1 + \varepsilon_1 \sin \alpha_1) \mathcal{F}_{\alpha_1} [V_1](\sigma_1). \quad (27)$$

La transferencia de vuelta  $\mathcal{M}_2$  a  $\mathcal{M}_1$  se define por  $(R_2, R'_1, D, s, r, U_2, U_1) \leftrightarrow (\alpha_2, \varepsilon_2, \sigma_2, \rho_2, V'_2, V'_1)$  y se describe por

$$V'_1(\rho_2) = e^{i\alpha_2} (\cos \alpha_2 + \varepsilon_2 \sin \alpha_2) \mathcal{F}_{\alpha_2} [V_2](\rho_2). \quad (28)$$

Se demuestran los siguientes resultados<sup>20,22</sup>:

1.  $\alpha_1 = \alpha_2$ . Sin embargo, a veces, se escribirán todavía  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  para distinguir las dos transferencias.
2. Los parámetros  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\varepsilon_1$  y  $\varepsilon_2$  son tales que  $(\cos \alpha_1 + \varepsilon_1 \operatorname{sen} \alpha_1)(\cos \alpha_2 + \varepsilon_2 \operatorname{sen} \alpha_2) = 1$ .
3. Las variables escaladas son tales que  $\rho_1 = \rho_2$  y  $\sigma_1 = \sigma_2$ , si  $\alpha_1$  es real; y  $\rho_1 = \pm \rho_2$  y  $\sigma_1 = \pm \sigma_2$ , si  $\alpha_1$  es complejo.
4. Las amplitudes escaladas son tales que  $V_1 = V_1'$  y  $V_2 = V_2'$ , si  $\alpha_1$  es real; y  $V_1(\rho_1) = V_1'(\pm \rho_1)$  y  $V_2(\sigma_1) = V_2'(\pm \sigma_1)$ , si  $\alpha_1$  es complejo.

Luego se combinan las relaciones (27) y (28) y se llega al resultado siguiente<sup>20,22</sup>: la transferencia del campo de ida y vuelta de  $\mathcal{M}_1$  a  $\mathcal{M}_1$  en el resonador se traduce por

$$V_1(\rho_1) = e^{2i\alpha_1} \mathcal{F}_{2\alpha_1}[V_1](\rho_1). \quad (29)$$

Finalmente, se demuestra un resultado más general<sup>16,22</sup>: para cualquier  $\alpha$  se tiene

$$V_1(\rho_1) = e^{2i\alpha} \mathcal{F}_{2\alpha}[V_1](\rho_1). \quad (30)$$

La función  $V_1$  debe ser función propia de la transformación de Fourier fraccionaria  $\mathcal{F}_\alpha$ , cualquiera sea  $\alpha$ : se concluye que  $V_1$  es una función de Hermite-Gauss, o una combinación lineal de tales funciones (con coeficientes apropiados<sup>22,23</sup>). La amplitud escalada  $V_1$  se escribe

$$V_1(\xi, \eta) = U_0 H_m(\xi) H_n(\eta) \exp\left[-\frac{\xi^2 + \eta^2}{w^2}\right], \quad (31)$$

donde  $U_0$  es un factor dimensional; el factor  $w$  expresa el ensanchamiento de la gaussiana.

En el espacio físico, la amplitud del campo  $U_1$  que corresponde a  $V_1$  se obtiene si se rempazan en la relación (31) las variables escaladas por las variables espaciales. Hay que distinguir dos casos, como se muestra en la sección siguiente.

## 5.2. Estabilidad de un resonador y consecuencia para los modos

Si el parámetro  $\alpha_1$  es imaginario, el factor  $e^{i\alpha_1}$  en la relación (29) representa una atenuación que corresponde a pérdidas por difracción. Se dice que el resonador es inestable. De lo contrario, si  $\alpha_1$  es real, el resonador es estable. Se muestra que  $\alpha_1$  es real si, y solamente si,

$$0 < \left(1 - \frac{D}{R_1'}\right) \left(1 - \frac{D}{R_2'}\right) < 1. \quad (32)$$

La relación (32) es la condición de estabilidad clásica de un resonador óptico<sup>16,23,24</sup>.

Si el resonador es estable, el parámetro  $\alpha$  que representa la transferencia del campo por difracción de un espejo al otro es un número real. Las variables escaladas también son reales, de tal manera que cuando se pasa del dominio fraccionario al dominio físico, es decir, cuando se rempazan en la relación (31) las variables escaladas por las variables espaciales, se obtienen amplitudes en formas de funciones de Hermite-Gauss. De ahí la noción de modo de Hermite-Gauss<sup>23,24</sup>.

Si el resonador es inestable, las variables escaladas son complejas y la función de Gauss  $\exp[-(\xi^2 + \eta^2)/w^2]$  se vuelve la función  $\exp[-i(x^2 + y^2)/u^2]$ , donde  $u$  es un factor que depende de  $w$  y del factor de escala entre variables espaciales y escaladas. Esa función no es una gaussiana y representa más bien una onda esférica.

La teoría es la misma en el espacio fraccionario, para resonadores estables o inestables. La diferencia entre los modos de las dos clases de resonadores aparece cuando se pasa al espacio físico, cuando se rempazan las variables y amplitudes escaladas por las espaciales. Las siguientes secciones ilustran el caso de los resonadores inestables.

### 5.3. Factor de fase cuadrática sobre un espejo esférico

Sea  $\mathcal{M}$  un espejo esférico de radios  $R$  y  $R'$ . Se trata de interpretar una amplitud de la forma

$$U_M(r) = U_0 \exp \left[ \frac{i\pi}{\lambda\Delta} r^2 \right], \quad (33)$$

donde  $U_0$  es una constante dimensional y  $\Delta$  un parámetro con dimensión de longitud.

Sea  $\mathcal{A}$  (radio  $R_A$ ) una esfera del espacio objeto, tangente al espejo en su vértice. La amplitud del campo sobre  $\mathcal{A}$  es

$$U_A(r) = U_M(r) \exp \left[ -\frac{i\pi}{\lambda} \left( \frac{1}{R_A} - \frac{1}{R} \right) r^2 \right] = U_0 \exp \left[ -\frac{i\pi}{\lambda} \left( \frac{1}{R_A} - \frac{1}{R} - \frac{1}{\Delta} \right) r^2 \right]. \quad (34)$$

Se elige  $R_A$  tal que

$$\frac{1}{R_A} = \frac{1}{R} + \frac{1}{\Delta}, \quad (35)$$

de tal manera que  $U_A(r) = U_0$ . Luego, la amplitud  $U_M$  de la relación (33) representa la onda esférica del espacio objeto que diverge desde el centro de curvatura de  $\mathcal{A}$ , a la distancia  $R_A$  del vértice  $\Omega$  del espejo  $\mathcal{M}$ .

Si  $\mathcal{A}'$  es una esfera del espacio imagen (radio  $R_{A'}$ ), tangente a  $\mathcal{M}$ , la amplitud del campo sobre  $\mathcal{A}'$  es

$$U_{A'}(r) = U_M(r) \exp \left[ -\frac{i\pi}{\lambda} \left( \frac{1}{R_{A'}} - \frac{1}{R'} \right) r^2 \right] = U_0 \exp \left[ -\frac{i\pi}{\lambda} \left( \frac{1}{R_{A'}} - \frac{1}{R'} - \frac{1}{\Delta} \right) r^2 \right], \quad (36)$$

y si  $R_{A'}$  es tal que

$$\frac{1}{R_{A'}} = \frac{1}{R'} + \frac{1}{\Delta}, \quad (37)$$

se tiene  $U_{A'}(r) = U_0$ . La amplitud  $U_M$  de la relación (33) representa además la onda esférica del espacio imagen que converge al centro  $C'$  de  $\mathcal{A}'$ , a la distancia  $R'$  del vértice  $\Omega$ .

### 5.4. Análisis de los resonadores inestables

En el dominio fraccionario, las variables escaladas son complejas, pero las funciones propias son funciones de Hermite–Gauss. La función asociada con el modo fundamental se escribe

$$V(\rho) = U_0 e^{-\pi \rho \cdot \rho}, \quad (38)$$

donde  $U_0$  es una constante dimensional. En el espacio físico, la amplitud escalada  $V$  se vuelve

$$U(r) = U_0 \exp \left[ -i\pi \frac{r^2}{\lambda\chi R'_1} \right], \quad (39)$$

la cual corresponde a una onda esférica.

*Ejemplo 1.* Sea un resonador tal que  $2L = R'_1 + R'_2$  con  $R'_1 > R'_2 > 0$  (fig. 2 a). El resonador es confocal simétrico. Se tiene

$$J = \frac{(D - R'_2)(R'_1 - d)}{L(L - R'_1 - R'_2)} = -\frac{(R'_1 - R'_2)^2}{(R'_1 + R'_2)^2} < 0, \quad (40)$$

y se concluye que el resonador es inestable. La transferencia del campo de  $\mathcal{M}_1$  a  $\mathcal{M}_2$  se relaciona con  $\varepsilon$  tal que

$$\varepsilon^2 = \frac{D(D - R'_2)}{(R'_1 - D)(D - R'_1 - R'_2)} = -1, \quad (41)$$

y  $\chi = 1$ . La amplitud del modo fundamental sobre  $\mathcal{M}_1$  se escribe

$$U_1(x, y) = U_0 \exp \left[ -\frac{i\pi}{\lambda R'_1} (x^2 + y^2) \right]. \quad (42)$$



De acuerdo con la sección anterior, se concluye que  $U_1$  corresponde, en el espacio objeto de  $\mathcal{M}_1$ , a una onda esférica, centrada a la distancia  $d$  de  $\Omega_1$ , tal que

$$\frac{1}{d} = \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R'_1} = \frac{2}{R_1}. \quad (43)$$

Se nota que el centro de esa onda es el foco de  $\mathcal{M}_1$ , y se espera que se refleja en una onda plana. De hecho, en el espacio imagen de  $\mathcal{M}_1$ , la amplitud  $U_1$  corresponde a una onda centrada a la distancia  $d'$  de  $\Omega_1$  tal que

$$\frac{1}{d'} = \frac{1}{R'_1} - \frac{1}{R_1} = 0, \quad (44)$$

y  $d'$  es infinito.

La amplitud del campo sobre  $\mathcal{M}_2$  se obtiene primero en forma escalada con

$$\sigma \cdot \sigma = \frac{i}{\lambda \chi R'_1} (\cos \alpha + \varepsilon \operatorname{sen} \alpha) s \cdot s, \quad (45)$$

y como  $\chi = 1$ , como  $R'_2 = -R_2$  y  $2D = R'_1 + R'_2$  se obtiene

$$\sigma \cdot \sigma = -\frac{i}{\lambda R'_1} \frac{(D - R'_2)R'_1}{(R'_1 - D)R'_2} = -\frac{i}{\lambda R'_2}, \quad (46)$$

y la amplitud sobre  $\mathcal{M}_2$  en el espacio físico se escribe

$$U_2(x, y) = U_0 \exp \left[ \frac{i\pi}{\lambda R'_2} (x^2 + y^2) \right]. \quad (47)$$

Esa amplitud corresponde a una onda plana en el espacio objeto de  $\mathcal{M}_2$  y, en el espacio imagen, a una onda esférica que diverge desde el foco de  $\mathcal{M}_2$ .

*Ejemplo 2.* Sea un resonador simétrico:  $R'_1 = R'_2 < 0$  (fig. 2 b). Se tiene

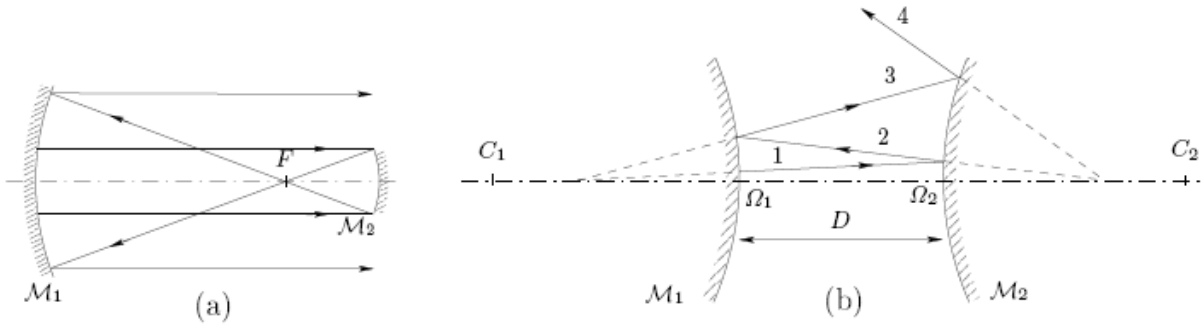
$$J = \frac{(D - R'_2)(R'_1 - D)}{D(D - R'_1 - R'_2)} = -\frac{(D - R'_1)^2}{D(D - 2R'_1)} < 0, \quad \varepsilon^2 = \frac{D(D - R'_1)}{(R'_1 - D)(D - R'_1 - R'_2)} = -\frac{D}{D - 2R'_1}, \quad (48)$$

y el resonador es inestable; de  $\chi R'_1 > 0$  se deduce  $\chi < 0$ , y luego  $\chi = -[D/(D - 2R'_1)]^{1/2}$ . La amplitud del campo sobre  $\mathcal{M}_1$  se escribe

$$U(r) = U_0 \exp \left[ \frac{i\pi}{\lambda R'_1} \sqrt{\frac{D - 2R'_1}{D}} r^2 \right]. \quad (49)$$

En el espacio objeto de  $\mathcal{M}_1$ , esa amplitud corresponde a una onda esférica que converge a la distancia  $d$  de  $\Omega_1$  tal que

$$\frac{1}{d} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R'_1} \sqrt{\frac{D - 2R'_1}{D}}, \quad (50)$$



**Figura 2.** Ejemplos de resonadores inestables. (a) Resonador confocal inestable: las ondas esféricas resonantes están centradas en el foco  $F$ . (b) Resonador inestable simétrico: los rayos 1 y 3 corresponden a la onda esférica resonante en el espacio imagen de  $\mathcal{M}_1$  y el espacio objeto de  $\mathcal{M}_2$ ; los rayos 2 y 4 a la onda resonante en el espacio objeto de  $\mathcal{M}_1$  e imagen de  $\mathcal{M}_2$ .

es decir (tomando en cuenta  $R'_1 = -R_1$ )

$$d = \frac{R_1 \sqrt{D}}{\sqrt{D} - \sqrt{D + 2R_1}} = -\frac{1}{2} \left( D + \sqrt{D^2 + 2DR_1} \right). \quad (51)$$

En el espacio imagen de  $\mathcal{M}_1$  se tiene una onda esférica que diverge a partir del punto situado a la distancia  $d'$  de  $\Omega_1$ , tal que

$$\frac{1}{d'} = \frac{1}{R'_1} + \frac{1}{R'_1} \sqrt{\frac{D - 2R'_1}{D}}, \quad (52)$$

es decir

$$d' = \frac{R'_1 \sqrt{D}}{\sqrt{D} + \sqrt{D - 2R'_1}} = \frac{1}{2} \left( D - \sqrt{D^2 - 2DR'_1} \right). \quad (53)$$

### 5.5. Conclusión para la teoría de los resonadores

La óptica de Fourier fraccionaria aparece como un marco teórico donde se unifican las propiedades de los modos de los resonadores ópticos, estables o inestables.

Más generalmente, los espejos de un resonador óptico no son necesariamente esféricos, pero astigmáticos. Por ejemplo un resonador puede ser estable para una sección de curvatura principal y inestable para la sección ortogonal. La óptica de Fourier fraccionaria permite analizar tal situación si se incluyen los elementos desarrollados en la sección 4 para describir la propagación de un espejo al otro. El análisis unificado de los dos tipos de resonadores tiene un papel clave en tal caso.

## 6. CONCLUSIÓN Y PERSPECTIVAS

La transformación de Fourier fraccionaria se reveló una herramienta eficaz para representar los fenómenos de difracción, y por lo tanto se puede hablar de la óptica de Fourier fraccionaria, como una doctrina ya establecida, en la cual se pueden plantear y resolver muchos problemas de la óptica coherente. Aparte de los sistemas astigmáticos y los resonadores ópticos, se aplica a los haces gaussianos<sup>16</sup>, a la formación de imágenes, a la representación de la propagación en líneas de transmisión dispersivas, etc.

Hay un interés en calcular y fabricar componentes difractivos que funcionan en el régimen de difracción de Fresnel, y para los cuales se plantean problemas específicos de muestreo. Y precisamente fue posible extender el famoso teorema de muestreo de Shannon al dominio fraccionario<sup>25</sup>, de tal modo que existe ahora un campo para investigar entre la óptica coherente y el tratamiento de señales. Se trata de extender al dominio fraccionario toda una serie de tratamientos ópticos clásicos: correlación fraccionaria, filtrado de Wiener, de Vander Lugt etc. Una nueva vía de descubrimientos prometedores se está abriendo a los investigadores.

---

## AGRADECIMIENTOS

Gracias al Dr. Éric Fogret (UBS) y al Prof. Jorge Mahecha (Universidad de Antioquia) por su ayuda. Gracias al Prof. Jorge Rueda (Universidad de Pamplona) por invitarme a participar al XI Encuentro Nacional de Óptica & II Conferencia Andina y del Caribe en Óptica y sus Aplicaciones.

## REFERENCIAS

1. N. Wiener, "Hermitian polynomials and Fourier analysis," *J. Math. Phys. MIT* **8**, pp. 70–73, 1929.
2. E. U. Condon, "Immersion of the Fourier transform in a continuous group of functional transformations," *Proc. Nat. Acad. Sc. USA* **23**, pp. 158–164, 1937.
3. Kober, "Wurzeln aus der Hankel-, Fourier- und anderen stetigen Transformationen," *Quart. J. Math. (Oxford)* **10**, pp. 45–59, 1939.
4. A. L. Patterson, "Function spaces between crystal space and Fourier-transform space," *Zeits. Kristal.* **112**, pp. 22–32, 1959.
5. V. Namias, "The fractional order Fourier transform and its application to quantum mechanics," *J. Inst. Maths Applics* **25**, pp. 241–265, 1980.
6. A. C. McBride and F. H. Kerr, "On Namias's fractional Fourier transform," *IMA J. of Appl. Math.* **39**, pp. 159–175, 1987.
7. R. S. Khare, "Fractional Fourier analysis of defocused images," *Opt. Comm.* **12**, pp. 386–388, 1974.
8. D. Mendlovic and H. M. Ozaktas, "Fractional Fourier transforms and their optical implementation: I," *J. Opt. Soc. Am. A* **10**, pp. 1875–1881, 1993.
9. H. M. Ozaktas and D. Mendlovic, "Fractional Fourier transforms and their optical implementation: II," *J. Opt. Soc. Am. A* **10**, pp. 2522–2531, 1993.
10. A. W. Lohmann, "Image rotation, Wigner rotation, and the fractional Fourier transform," *J. Opt. Soc. Am. A* **10**, pp. 2181–2186, 1993.
11. P. Pellat-Finet, "Transformación de Fourier fraccional y propagación del campo electromagnético," Memos de investigación n° 121, Universidad de los Andes, Bogotá, 1993.
12. T. Alieva, V. Lopez, F. Agullo-Lopez and L. B. Almeida, "The fractional Fourier transform in optical propagation problems," *J. of Mod. Opt.* **41**, pp. 1037–1044, 1994.
13. P. Pellat-Finet, "Fresnel diffraction and the fractional order Fourier transform," *Opt. Lett.* **19**, pp. 1388–1390, 1994.
14. H. M. Ozaktas, Z. Zalevsky, M. A. Kutay, *The fractional Fourier transform, with applications in optics and signal processing*, John Wiley & Sons, Chichester, 2001.
15. É. Fogret, P. Pellat-Finet, "Agreement of fractional Fourier optics with the Huygens-Fresnel principle," *Opt. Comm.* **272**, pp. 281–288, 2007.
16. P. Pellat-Finet, *Lecciones de óptica de Fourier*, Ediciones de la Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, 2004.
17. G. Bonnet, "Introduction à l'optique métaxiale. Première partie : diffraction métaxiale dans un espace homogène : trilogie structurale, dioptré sphérique," *Ann. Télécom.* **33**, pp. 143–165, 1978.
18. G. Bonnet, "Introduction à l'optique métaxiale. Deuxième partie : systèmes dioptriques centrés (non diaphragmés et non aberrants)," *Ann. Télécom.* **33**, pp. 225–243, 1978.
19. J. W. Goodman, *Introduction to Fourier Optics*, Mc Graw-Hill, New York, 1968.
20. P. Pellat-Finet, É. Fogret, "Complex order fractional Fourier transforms and their use in diffraction theory. Application to optical resonators," *Opt. Comm.* **258**, pp. 103–113, 2006.
21. P. Pellat-Finet, "Diffraction entre un émetteur et un récepteur localement toriques. Application à l'étude des systèmes astigmatés," *C. R. Acad. Sc. Paris* **327** Série II b, pp. 1269–1274, 1999.
22. P. Pellat-Finet, É. Fogret, "A fractional Fourier transform theory of optical resonators," a publicar.
23. Y. Ananiev, *Résonateurs optiques et problèmes de divergence du rayonnement laser*, Mir, Moscú, 1982.
24. A. E. Siegman, *Lasers*, University Science Books, Sausalito, 1986.
25. R. Torres, P. Pellat-Finet, Y. Torres, "Sampling theorem for fractional bandlimited signals: a self-contained proof. Application to digital holography," *IEEE Signal Processing Letters* **13**, pp. 676–679, 2006.