
Estudio De La Varianza Al Cambio De Escala Y Al Desplazamiento En El Plano En Un JTC De Orden Fraccional

José Luis Aguilar Siado^{1,2} y Yezid Torres Moreno¹

¹ GOTS, Grupo de Óptica y Tratamiento de Señales, Facultad de Ciencias, Escuela de Física, Universidad Industrial de Santander, A.A. 678, Bucaramanga, Colombia.

² Facultad de Ingeniería, Universidad del Magdalena, A.A. 731, Santa Marta, Colombia;

RESUMEN

Con el uso de una definición alternativa para la convolución y la correlación de orden fraccional y utilizando un diseño y su implementación experimental para llevar a cabo un proceso óptico digital de correlación conjunta fraccional (JTC fraccional), se analiza la correlación en el plano fraccional de dos imágenes bidimensionales. Se evalúan los resultados para dos imágenes similares, luego se hace la evaluación variando el tamaño de una de las imágenes, con el fin de evaluar su varianza al cambio de escala. Se hace también el análisis variando la posición de una de ellas con respecto al eje óptico, estudio de la varianza al desplazamiento.

La separación entre imágenes a la entrada, corresponde con un único orden fraccional. Para la construcción del correlador se utiliza un bi-prisma de Fresnel junto a las imágenes a correlacionar, este proporciona una fase lineal a dichas imágenes. Los picos de correlación fraccional son analizados mediante simulación computacional y posteriormente son comparados con los resultados obtenidos en el procesador óptico digital implementado en el laboratorio.

Palabras Clave: Correlador Híbrido, Procesamiento de Señales, Transformada de Fourier fraccional, Transformada de Fourier.

ABSTRACT

By using of an alternative definition for the fractional convolution and correlation, using experimental design and implementation which perform an optical digital process of fractional joint correlation (JTC fractional), it is analyzed correlation for two bidimensional images on the fractional plane. Results are evaluated for two similar images, then evaluation is realized varying the size of an image only, in order to assess their variance to change of scale. Analysis is done too by varying an image position respect of the optical axis, study of variance to shifting (spatial variance).

Separation between images on entry, correspond to a single fractional order. For the construction of correlator it is using a biprism of Fresnel just in front to images to correlate, which provides a linear phase to images. The fractional correlation peaks are analyzed by computer simulation and then compared with those obtained in the optical digital processor implemented in laboratory.

Keywords: Hybrid Correlator, Signal Processing, Fractional Fourier Transform, Fourier Transform.

1. INTRODUCCIÓN

La correlación es una herramienta muy utilizada en diferentes aplicaciones, tales como el reconocimiento de patrones, la extracción de las características o formas de la imagen, la localización de objetos, etc.

Considerando cuidadosamente la propiedad de varianza al corrimiento¹ de la transformada de Fourier fraccional, y la flexibilidad que brindan los esquemas propuestos hoy en día, al corrimiento espacial en el plano de entrada, es necesario un proceso de correlación de imágenes, con miras a tener a disposición un sistema capaz de correlacionar cualquier tipo de imagen bidimensional.

Se ilustrará el esquema transformador de Fourier fraccional a utilizar; el mismo que nos permitirá llevar a cabo un proceso de *Correlación de Fourier Fraccional Conjunta (JTC Fraccional)* de las imágenes, y que será descrito paso a paso durante el desarrollo del trabajo. Tal esquema mencionado brinda una transformación de Fourier fraccional exacta.

La correlación fraccional tiene la propiedad de ser variante al corrimiento, lo cual no siempre es desventaja ya que es utilizable, por ejemplo, si se desea que un objeto sea reconocido cuando está posicionado en cierta área, y rechazado o desechado si no lo está. Usando una nueva definición de correlación fraccional², se realizará un filtraje en el dominio

espacio-frecuencia espacial.

El plano de entrada estará acompañado por un biprisma el cual nos va a permitir que tanto la escena como la referencia tengan el factor de fase adecuado para lograr obtener una correlación por transformación de Fourier fraccional conjunta.

Un detector cuadrático (cámara CCD) será usado entonces para el registro en intensidad de la información que ha sido transformada fraccionalmente en un orden α , para luego continuar el proceso digitalmente.

Las imágenes a utilizar serán variadas de posición, una con respecto a la otra, respecto del eje óptico, con el fin de evaluar la propiedad de varianza al corrimiento de la transformada de Fourier fraccional y en consecuencia de la correlación fraccional; de igual manera se cambiará el tamaño de una de las imágenes, con respecto a la otra, evaluando así la propiedad de escalamiento de la transformada de Fourier fraccional.

Las ventajas de esta nueva definición de correlación fraccional, principalmente, es que cumple con todas las propiedades que han permitido que la correlación sea una de las más interesantes, operacionalmente, en todo el análisis de Fourier. Esta definición además nos permite llevar a cabo ópticamente un proceso de correlación fraccional a un bajo costo en el laboratorio en donde fácilmente puede adicionarse un factor de fase constante tanto a la escena como a la referencia, usando un biprisma⁴ de Fresnel.

2. DIFRACCIÓN DE FRESNEL Y LA TRANSFORMADA DE FOURIER FRACCIONAL

Considerando el caso general, el cual es de interés para el desarrollo de este trabajo, en donde se toma en lugar de emisores y receptores planos, emisores y receptores esféricos³, se analiza la relación existente entre los campos electromagnéticos monocromáticos en estas superficies, y el fenómeno de difracción o propagación ocurrido entre estas.

Teniendo en cuenta que la amplitud producida por una fuente puntual monocromática sobre una superficie esférica centrada en la fuente, es constante, se puede asumir por normalización, que esta amplitud tiene como valor la unidad. Bajo estas consideraciones se puede llegar a la expresión de la transferencia del campo entre las dos superficies³.

Es conocido además que la forma integral¹ de la transformada de Fourier fraccional de orden α de una función f es:

$$\mathfrak{F}_\alpha[f](\sigma) \equiv \frac{ie^{-i\alpha}}{\text{sen}\alpha} \exp[-i\pi\sigma^2 \cot\alpha] \times \int_{R^2} \exp[-i\pi\rho^2 \cot\alpha] \exp\left[\frac{2i\pi}{\text{sen}\alpha} \sigma \cdot \rho\right] f(\rho) d\rho \quad (1)$$

Expresando la difracción de Fresnel (transferencia del campo entre dos superficies cualesquiera) en forma de una transformación de Fourier fraccional se obtiene una expresión para el orden α , de la siguiente forma:

$$\cot\alpha = \varepsilon \left(\frac{1-\mu}{\mu} \right), \quad (2)$$

donde $\mu = x/f$ y donde x es la distancia de observación sobre el eje óptico, y f es la distancia focal de la lente.

ε es un número real diferente de cero, que depende de la longitud de onda de la iluminación y del radio de curvatura del emisor. También depende de la variable reducida ρ dada por:

$$\rho = \frac{r}{\sqrt{\lambda \varepsilon f}} \quad (3)$$

2. CORRELACIÓN

2.1. Correlación Convencional

Se ha definido la correlación convencional de las funciones f y g como:

$$C'(z) = \int f \otimes g(\underline{z}) = \int f(u) g^*(u-z) du \quad (4)$$

Es fácil observar de esta expresión que la función g desplazada al interior de la integral puede ser expresada como la correlación de ella misma centrada, con una distribución de Dirac desplazada.

2.2. Correlación Fraccional

Se ha definido recientemente² la convolución fraccional, introduciendo una curvatura adicional apropiada en el filtro,

$$\mathcal{J}^{*\alpha} g(\underline{z}) = \mathcal{F}^{-\alpha} \left\{ \mathcal{F}^{\alpha} \left[\mathcal{J} \bar{\mathcal{F}}^{\alpha} \left[\underline{e}^{-i\pi z^2 \cot \alpha} \right] \right] \right\} \quad (5)$$

permitiendo obtener una expresión en forma de integral similar a la correlación fraccional, y que denotaremos,

$$\mathcal{J} \otimes^{\alpha} g(\underline{z}) = \int f(u) g^*(u-z) e^{i2\pi(u-z)\cot \alpha} du, \quad (6)$$

o en forma equivalente,

$$CRF(z) = \mathcal{J} \otimes^{\alpha} g(\underline{z}) = \int f(u) \mathcal{J}^{*\alpha} \delta(u-z) \bar{\mathcal{J}}^{\alpha}(u) du \quad (7)$$

En forma equivalente a la ecuación (4), observamos en esta última expresión, dentro de la integral, que la función g está correlacionada, fraccionalmente, con una distribución de Dirac desplazada.

Esto muestra que para el desplazamiento de la función, sólo basta convolucionar esta fraccionalmente con una distribución de Dirac. La expresión (7) será usada para la implementación del esquema óptico a utilizar.

3. IMPLEMENTACIÓN ÓPTICA

El término de mayor interés es $e^{i2\pi u \cot \alpha}$ el cual corresponde a la fase lineal que debe introducirse a las imágenes a correlacionar, para así tener un proceso de correlación fraccional para satisfacer la ecuación (6).

Se utiliza entonces un prisma que nos permita adicionar una fase lineal a cada función a correlacionar, Fig. 1, haciendo corresponder dicha fase con la fase lineal de la definición (6) del análisis precedente.

Teniendo en cuenta las variables reducidas y la ecuación (2), se obtiene un orden para la transformación fraccional adecuada a un desplazamiento espacial z'' específico y una distancia de observación x , respectivamente:

$$\cos \alpha = \frac{f \sin \theta}{z'' + f \sin \theta}, \quad x = f \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} \quad (8)$$

El ángulo θ , que es la inclinación introducida sobre el haz incidente, es una cantidad que depende del valor del ángulo de inclinación del biprisma.

Se puede afirmar que dando un corrimiento adecuado, se obtiene un orden fraccional único para ese corrimiento y una ubicación única de la lente y el plano de detección.

Se analiza entonces lo que la cámara registrará. Llamemos $h(z)$ a la función de entrada al sistema, la cual está expresada por:

$$h(z) = \mathcal{J}^{*\alpha} \delta(z - z''') \underline{g}(z) + \mathcal{J}^{*\alpha} \delta(z + z''') \underline{g}(z) \quad (9)$$

Transformando fraccionalmente la función $h(z)$, se ubica una CCD en el plano de salida, y al registro sobre esta, debe multiplicarse por un término de fase cuadrática de la forma $e^{i\pi z^2 \cot \alpha}$, para satisfacer la condición de filtro curvo. Posteriormente se aplica una transformación de Fourier fraccional digital de orden $-\alpha$, obteniendo los tres términos del correlador²:

$$C_0(z) = \mathcal{F}^{-\alpha} \left\{ \left| \mathcal{F}^{\alpha} (z') \right|^2 + \left| f_{\alpha} (z') \right|^2 \right\} e^{i\pi z^2 \cot \alpha} \quad (10)$$

$$CRF(z) \mathcal{J}^{*\alpha} \delta(z - 2z''') e^{-i4\pi z''^2 \cot \alpha} = \mathcal{J} \otimes^{\alpha} g(\underline{z} + 2z''') \times e^{i4\pi z''^2 \cot \alpha} e^{-i4\pi z'' z \cot \alpha} \quad (11)$$

$$CRF(z) *^{\alpha} \delta(z + 2z''') e^{-i4\pi z''^2 \cot \alpha} = \int \otimes^{\alpha} g(\underline{z} - 2z''') \times e^{-i4\pi z''^2 \cot \alpha} e^{i4\pi z''' z \cot \alpha} \quad (12)$$

Las dos últimas expresiones corresponden a las correlaciones fraccionales cruzadas (la una complejo conjugada de la otra).

Conociendo ya las variables reducidas y el orden de transformación, se crea la matriz para obtener el factor de fase cuadrática $e^{i\pi z^2 \cot \alpha}$. Se trabaja con un tamaño de matriz de 481x481. Fig. 2.

3. RESULTADOS EXPERIMENTALES

Se ha utilizado para la iluminación un láser de Helio Neón con una longitud de onda de 632,8nm y 60mW; seguido de un filtrado espacial, objetivo-pinhole, y un sistema de colimación; la ubicación de la escena de entrada está sobre una lámina de acetato, justo seguido por un biprisma de Fresnel. El ángulo β del biprisma es calculado usando el ángulo de inclinación del haz proporcionado por éste cuando es iluminado por un haz de luz plano. El valor encontrado para este ángulo de inclinación es de 0,42°; La lente utilizada para la transformación de Fourier de orden fraccional de la escena de entrada es una lente de Fourier de focal 380mm; la cámara CCD para la adquisición de la intensidad a la salida del dispositivo óptico, del orden fraccional, de la escena de entrada, tiene como tamaño de píxel 8,4um(H) y 9,8um(V). Esta cámara está conectada a un computador a partir del cual se llevará a cabo la segunda transformación de orden fraccional $\alpha = -0,9$.

En este experimento se usó el valor de $\alpha = 0,9$. Con el uso de este valor, se calculó la distancia $x = 31,2\text{cm}$ ilustrada en la figura (1), comprendida entre la ubicación de la escena de entrada y la ubicación de la lente, la cual corresponde también a la distancia entre la lente y la cámara CCD.

En la Fig. 3a se puede observar la intensidad de la transformada de la escena (dos caracteres LL similares de tamaño 4mm) para el orden mencionado. Con el registro en intensidad se procede a multiplicar este registro con la matriz (función chirp bidimensional) de la Fig. 2 y luego se lleva a cabo, digitalmente, la transformada de Fourier de orden fraccional $\alpha = -0,9$ de este resultado; se obtiene una vista tridimensional de la autocorrelación fraccional en la Fig. 3b. La Fig. 3c nos muestra la autocorrelación completamente digital.

En la Fig. 4 se muestra la autocorrelación fraccional de los caracteres en la entrada, con uno de los caracteres escalado micrométricamente (250µm por lado): a. Intensidad de la transformada, para un orden 0,9; b. Corte transversal de la transformada de orden -0,9 de la imagen en a; c. Autocorrelación completamente digital.

En la Fig. 5 se observa: a. La intensidad de la transformada de orden fraccional 0,9 de la escena de entrada (corrimiento 100µm); b. Una vista tridimensional de la autocorrelación fraccional de la escena; c. Autocorrelación fraccional completamente digital.

Es claro de los resultados que para un escalamiento o un corrimiento de uno de los dos caracteres, caen por completo los picos de autocorrelación fraccional para el orden encontrado. Esto puede tomarse como fortaleza del sistema en el momento de identificar con precisión la ubicación, o cambios dimensionales, de cualquier carácter dentro de la escena de entrada. Los resultados experimentales están acorde con los resultados completamente digitales.

Un sistema de correlación fraccional como el desarrollado en este trabajo, puede ser aplicado para el uso de reconocimiento de patrones, como un dispositivo operativo de seguridad en la identificación de un objeto en particular, ubicando a la entrada, como en nuestro caso, objetos o imágenes bidimensionales.

REFERENCIAS

1. H. M. Ozaktas, Z. Zalevsky, M. A. Kutay, *The Fractional Fourier Transform*, pp. 447-448, JOHN WILEY & SONS LTD, England, 2001.
2. R. torres, Z. Lizarazo, Y. Torres, "Formulación matemática general para la correlación fraccional", VIII Encuentro Nacional de Óptica, Popayán, Colombia, (2002).
3. P. Pellat-Finet, *Lecciones de Óptica de Fourier*, pp. 26-28, 59-60, Springer-Verlag, Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia, 20 de Mayo de 2003.

4. J. W. Goodman, *Introduction to Fourier Optics*, pp. 120, Ed. 2, McGraw-Hill, Stanford University (1996).

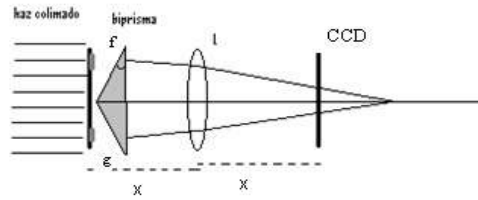


Figura 1. Configuración óptica para el cálculo de la correlación fraccional por transformación de Fourier fraccional conjunta.

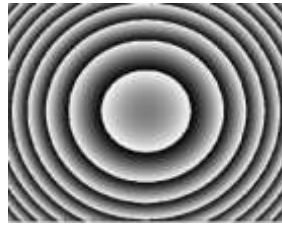


Figura 2. Matriz (función chirp bidimensional) que multiplica la imagen capturada por la CCD

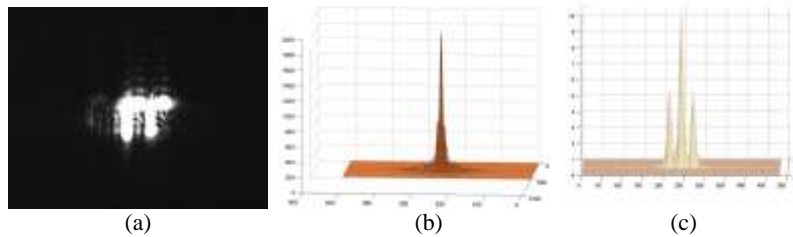


Figura 3. (a) Intensidad de la transformada para un orden 0,9; (b) Transformación *digital* de orden -0,9 de la imagen en (a); (c) Autocorrelación fraccional completamente digital

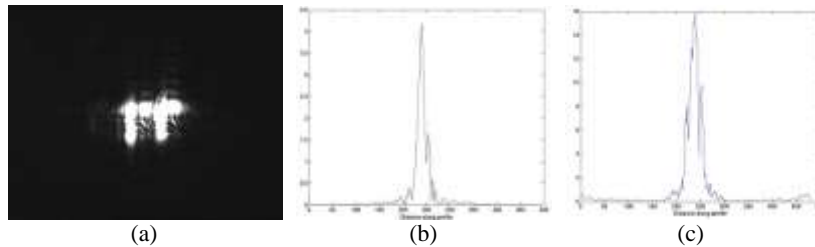


Figura 4. (a) Intensidad de la transformada, para un orden 0,9; (b) Corte transversal de la transformada de orden -0,9 de la imagen en (a); (c) Autocorrelación fraccional completamente digital

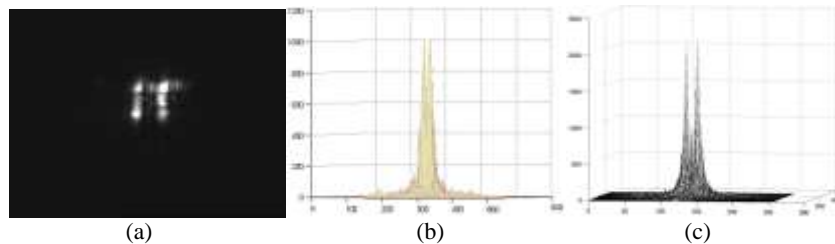


Figura 5. (a) Intensidad de la transformada de orden 0,9; (b) Autocorrelación fraccional de la escena de entrada; (c) Autocorrelación fraccional, completamente digital, de la escena de entrada.

