

---

# Difracción De Luz Con Momento Angular Orbital Por Un Axicon

Ángela M. Guzmán <sup>a</sup>, Claudia P. Barrera P. <sup>b</sup>, Jefferson Flórez G. <sup>b</sup>, Florencio E. Hernández <sup>c</sup>

<sup>a</sup>Physics Department, Florida Atlantic University, 777 Glades Road, Boca Raton Fl 33433, USA. <sup>i</sup>

<sup>b</sup>Departamento de Física, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia.

<sup>c</sup>Department of Chemistry and CREOL, The College of Optics & Photonics, University of Central Florida, P.O. Box 162700, Orlando, FL 32816-2700, USA.

---

## RESUMEN

Estudiamos aquí el problema de la difracción escalar de Fresnel por un axicón iluminado con haces de Laguerre-Gauss  $u_{pl}(r, \phi, z)$  con modo radial  $p$  arbitrario y momento angular orbital  $l$ , cuya dirección de propagación coincide con el eje del axicón. Para obtener expresiones analíticas del campo difractado utilizamos una expansión en serie de Taylor de la transmitancia del axicón en la aproximación de elemento óptico delgado y transparente, y la transformada de Hankel de orden  $l$ . Se presentan resultados de los patrones de difracción para diferentes valores del momento angular de la luz en función de la distancia de propagación. El axicón no altera el momento angular de la luz ni discrimina entre ondas de helicidad positiva y negativa, pero introduce una superposición de modos radiales con el mismo momento angular.

**Palabras Clave:** Momento angular orbital, axicón, difracción.

## ABSTRACT

We study here the scalar diffractive properties in the Fresnel regime of an axicon when illuminated with paraxial Laguerre-Gaussian beams  $u_{pl}(r, \phi, z)$  incident on-axis, for arbitrary  $p$  radial mode structure and orbital angular momentum  $l$ . We use a Taylor series expansion of the axicon transmittance in the thin-transparent device approximation and the  $l^{\text{th}}$  order Hankel transform to obtain analytical expressions for the Fresnel diffracted field. We present diffraction patterns for different values of the orbital angular momentum as functions of the propagation distance. The axicon does not affect the orbital angular momentum and has the same diffraction properties for waves with positive or negative helicity, but introduces a superposition of radial modes with the same angular momentum

**Keywords:** Orbital angular momentum, axicon, diffraction.

---

## 1. INTRODUCCIÓN

Posibles aplicaciones de luz con momento angular orbital (OAM) en criptografía cuántica han despertado interés por el estudio del comportamiento de dispositivos ópticos destinados a su manipulación<sup>1,2</sup>. La seguridad de las comunicaciones cuánticas yace esencialmente en el uso de un fotón simple que porta la información en un estado cuántico de polarización. Esquemas de más alta dimensionalidad<sup>2</sup> pueden utilizar estados cuánticos de momento angular orbital con diferente helicidad y carga topológica. Sin embargo sólo es posible definir el momento angular de la luz dentro de la aproximación paraxial<sup>iii</sup> y con respecto al eje  $z$  de propagación asociado con esta aproximación. Las funciones de Laguerre-Gauss (LG) son solución de la ecuación de onda en la aproximación paraxial y forman un conjunto completo de funciones con momento angular definido que puede ser usado como base de expansión para la cuantización de un campo escalar, cuyos fotones tendrían simultáneamente una polarización y un momento angular definidos, y serían excitaciones de un modo  $\{p, l\}$  del campo. El patrón de intensidad de los modos LG se caracteriza por círculos concéntricos cuyo número y radio depende del modo del campo.

En los esquemas estándar de criptografía cuántica la información está codificada en los dos grados de libertad correspondientes a estados cuánticos de polarización de fotones individuales. En esquemas de comunicación

---

<sup>i</sup> Angela.guzman@fau.edu

<sup>ii</sup> En general solo es posible definir el momento angular total de la luz, debido a que no existe un sistema de referencia de reposo del fotón, desde donde se pueda definir su momento angular intrínseco de spin.

cuántica de alta dimensionalidad<sup>1,2</sup> se pretende codificar la información en un número mayor de grados de libertad mediante estados cuánticos de superposición de modos espaciales con diferente momento angular orbital. La generación controlada, la manipulación y la detección de estados de fotones codificados en sus grados de libertad espaciales son aspectos esenciales de estos esquemas. Por ello es necesario estudiar los efectos de propagación de modos LG a través de diferentes dispositivos ópticos e investigar las propiedades de focalización y posible resolución espacial de los mismos.

Los axicones son lentes cónicas que al ser iluminados uniformemente producen imágenes extendidas a lo largo del eje óptico. Para aperturas circulares y alto número de Fresnel, la intensidad a lo largo del eje de un axicón crece desde el vértice del axicón hasta su profundidad de foco, en concordancia con la óptica geométrica<sup>3</sup>. Cuando la región de transmisión de un axicón es anular y el número  $N$  de grados de libertad definido mediante el método de modos de comunicación<sup>4</sup> es grande ( $N > 2$ ), la luz es focalizada en un segmento lineal a lo largo del eje óptico del axicón<sup>5</sup>. El método de modos de comunicación es conveniente para el análisis de la propagación y contenido de información de campos ópticos con simetría rotacional<sup>5</sup> como los modos LG. Estudiamos aquí la transferencia de información contenida en el perfil anular del modo LG y las características espaciales de la imagen producida por un axicón. Demostramos que para incidencia a lo largo del eje óptico, haces con diferente momento angular pueden ser focalizados en diferentes secciones circulares de un plano transversal al eje, lo que permitiría asociar diferentes regiones circulares de una cámara CCD con estados de diferente momento angular.

## 2. DIFRACCION DE MODOS LAGUERRE-GAUSS POR UN AXICON

La generación de vórtices ópticos ha evolucionado rápidamente debido al avance en la fabricación de moduladores espaciales de la luz (SLMs) de gran calidad y adecuados para la producción de elementos ópticos difractivos como axicones helicoidales y láminas de fase en espiral. Este tipo de dispositivos tienen como ventaja sobre los hologramas generados por computador (CGH)<sup>6</sup> el permitir generar vórtices de diferente carga topológica, y estados de superposición adecuados para criptografía cuántica de alta dimensionalidad<sup>2</sup> en tiempo real. Los efectos de focalización mediante lentes de los denominados “modos doughnut” de un láser y de un vórtice puntual han sido discutidos en la literatura<sup>6</sup>.

Desde el punto de vista teórico un vórtice óptico con carga topológica  $l$ , puede ser representado por una superposición de funciones LG con diferente estructura radial  $p$  pero la misma carga topológica  $l$ . Las funciones LG son soluciones de la ecuación de onda en la aproximación paraxial. Midiendo la distancia  $r$  al eje óptico en unidades del ancho mínimo  $w_0$  del perfil transversal del modo LG, su amplitud en  $z=0$  está dada por:

$$u_{pl}(r, \theta, 0) = C \left[ r\sqrt{2} \right]^l L_p^l(2r^2) \exp(-r^2) \exp(il\theta) \quad (1)$$

La transformada de Fresnel de esta amplitud permite determinar la amplitud del modo LG en función de la distancia  $z$ , que será medida aquí en unidades de la longitud de Rayleigh  $z_R = kw_0^2/2$ :

$$u_{pl}(r, \theta, z) = \frac{C 2^{l/2} r^l}{(1+z^2)^{(l+1)/2}} L_p^l \left[ \frac{2r^2}{1+z^2} \right] \exp \left[ -\frac{(1-iz)r^2}{1+z^2} \right] \exp(il\theta) \exp \left[ i(2p+l+1) \tan^{-1} z \right]. \quad (2)$$

En la aproximación de dispositivo óptico delgado, la función de transmisión de un axicón que representa la fase introducida por la propagación a través del axicón está dada por:

$$t(r) = \exp[-i\beta r], \quad r < R, \quad (3)$$

donde  $\beta = kw_0(n-n_0)\alpha$  es el parámetro del axicón,  $k=2\pi/\lambda$ ,  $n$  el índice de refracción del axicón,  $n_0$  el índice de refracción del medio circundante ( $n_0=1$  en el aire),  $\alpha$  el ángulo formado por la superficie cónica con la superficie plana del axicón y  $R$  es el radio del axicón. Para propagación de haces con perfil Gaussiano a lo largo del eje del axicón, esta expresión es válida incluso al hacer tender  $r$  a infinito, con la condición  $w_0 < R$ . El parámetro  $\beta$  introducido aquí es una cantidad adimensional que para el caso de modos LG es del orden del número de modos de comunicación<sup>5</sup>. Nuestro problema es por tanto determinar la transformada de Fresnel del modo LG transmitido por el axicón, y cuya amplitud en  $z=0^+$  está dada por:

$$u_{pl}(r, \theta, 0^+) = C r^l 2^{l/2} L'_p(2r^2) \exp[-r^2] \exp(-i\beta r + il\theta) . \quad (4)$$

Este problema está cercanamente relacionado con la difracción escalar de Fresnel de un haz Gaussiano por un axicón helicoidal, para el cual fueron derivadas recientemente<sup>7</sup> expresiones analíticas en términos de la función hipergeométrica confluyente. Ello es debido a que la función de transmisión de un axicón helicoidal está dada por precisamente  $t_{HA}(r) = \exp(-i\beta r + il\theta)$ . Nuestro interés es sin embargo determinar el tipo de acoplamiento que introduce el axicón entre los modos LG, puesto que ellos forman un conjunto completo y ortonormal que puede ser usado como base de cuantización del campo dentro de la aproximación paraxial, y estudiar la transferencia de información entre el perfil descrito en la Ecuación (4) y la localización espacial de la imagen producida por el axicón.

Para calcular la distribución de amplitud a lo largo del eje consideramos la integral de difracción de Fresnel, que provee el patrón tridimensional  $U_{pl}(r, \phi; z)$  del campo:

$$U_{pl}(r, \phi; z) = \frac{2^{1+l/2} C \exp(ikz)}{i^{l+1} z} \exp\left(\frac{ir^2}{z}\right) \exp(il\phi) I_{pl}(r; z) , \quad (5)$$

donde  $k$  está expresado en unidades de  $z_R$ , y la función  $I(r; z)$  está dada por la integral:

$$I_{pl}(r; z) = \int_0^\infty d\rho \rho^{l+1} J_l\left[\frac{2r\rho}{z}\right] L'_p[2\rho^2] \exp[-(1-i/z)\rho^2 - i\beta\rho] . \quad (6)$$

Un análisis teórico de la focalización de un haz LG de orden  $p=0$  por un axicón, basado en una aproximación de fase estacionaria unidimensional<sup>8</sup>, condujo a concluir que el campo producido por el axicón cerca del eje óptico está descrito por una función de Bessel de orden  $l$ . La aproximación de fase estacionaria unidimensional ha sido ampliamente utilizada y es válida para determinar el campo sobre el eje para funciones sin momento angular orbital, cuya transformada de Fresnel se obtiene de la transformada de Hankel de orden cero. Para funciones con  $l$  diferente de cero, la aproximación de fase estacionaria debe ser bidimensional.

Si escribimos la integral de la Ecuación (6) en términos de las dos integrales que resultan de  $\exp(-i\beta\rho) = \cos(\beta\rho) - i \operatorname{sen}(\beta\rho)$ , y expandimos las funciones seno y coseno en serie de potencias obtenemos

$$I_{pl}(r; z) = C_{pl}(r; z) - i S_{pl}(r; z) \quad (7)$$

donde

$$C_{pl}(r; z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \beta^{2m}}{(2m)!} \int_0^\infty d\rho \rho^{2m+l+1} \exp[-(1-i/z)\rho^2] J_l\left[\frac{2r\rho}{z}\right] L'_p[2\rho^2] , \quad (8)$$

$$S_{pl}(r; z) = \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^m \beta^{2m+1}}{(2m+1)!} \int_0^\infty d\rho \rho^{2m+l+2} \exp[-(1-i/z)\rho^2] J_l\left[\frac{2r\rho}{z}\right] L'_p[2\rho^2] .$$

Usando las integrales<sup>7,10</sup>

$$\int_0^\infty d\rho \rho^{2m+l+1} \exp[-b\rho^2] J_l(c\rho) = \frac{c^2 b^{-(m+l+1)} m!}{2^{l+1}} \exp(-y^2) L'_m[y^2] ,$$

$$\int_0^\infty d\rho \rho^{2m+l+2} \exp[-b\rho^2] J_l(c\rho) = \frac{c^2 b^{-(m+l+3/2)} (m+1/2)!}{2^{l+1}} \exp(-y^2) L'_{m+\frac{1}{2}}[y^2] , \quad y = \frac{c}{2\sqrt{b}} , \quad (9)$$

Donde

$$L'_{m+\frac{1}{2}}(x) = \frac{(m+l+1/2)!}{(m+1/2)! l!} {}_1F_1(-(m+1/2); l+1; x). \quad (10)$$

Introducimos ahora las denominadas ondas LG elegantes<sup>7,11</sup>

$$\Phi_{pl}(r, \phi, z) = \frac{(-i)^{l+1} p!}{z} (1-i/z)^{-p-l/2-1} \exp\left[\frac{ir^2}{z} + il\phi\right] y^l \exp(-y^2) L'_p(y^2), \quad (11)$$

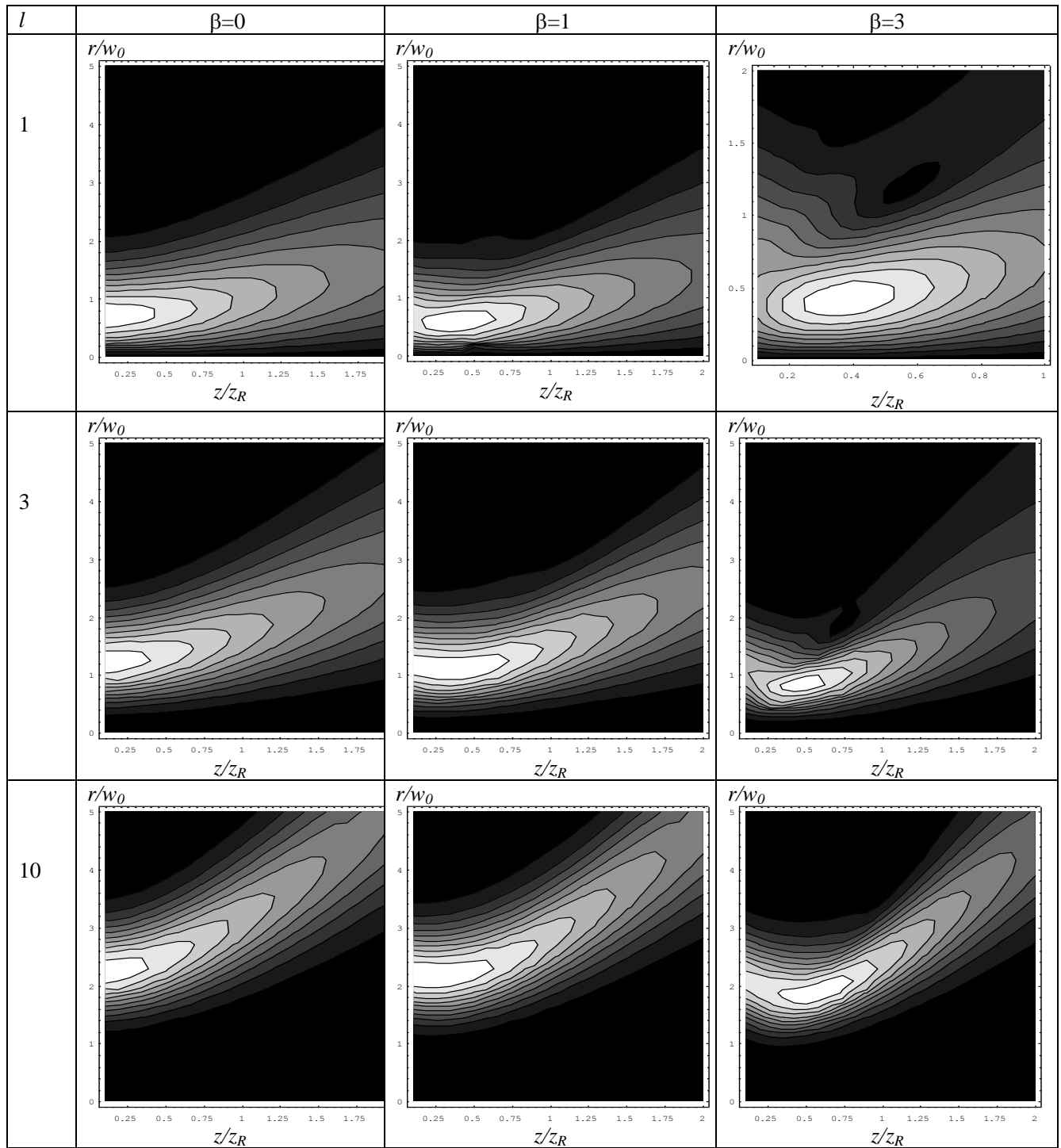
donde  $y^2 = c^2/4b = r^2(1+i/z)/(z^2+1)$  y expresamos la onda difractada en términos de ellas. Para el caso de un modo LG con  $p=0$ , (correspondiente a la iluminación de un axicón helicoidal con una Gaussiana), obtenemos:

$$U_{0l}(r; z) = 2C e^{ikz} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \beta^{2m} \left[ \frac{\Phi_{m,l}}{(2m)!} - i\beta \frac{\Phi_{m+1/2,l}}{(2m+1)!} \right]. \quad (12)$$

En la Tabla 1 se presentan curvas de contorno de la intensidad difractada para diferentes valores del parámetro del axicón y de momento angular orbital. La primera columna corresponde a la difracción del haz en propagación en el espacio libre ( $\beta=0$ ). Dado que  $\beta$  coincide con el número de modos de comunicación esperados para iluminación con un haz LG anular, es de esperar que para  $\beta > 2$  el axicón focalice el haz LG en un anillo, cuyo radio, extensión longitudinal, y posición a lo largo del eje  $z$ , son funciones de  $l$  y  $\beta$ . Las dos columnas de la derecha muestran el patrón de difracción para  $\beta=1,3$ . Observe que la gráfica para  $l=1$ ,  $\beta=3$ , tiene diferente escala. Para  $l=1$ , hay focalización del haz en un segmento longitudinal del eje  $z$ , incluso para  $\beta=1$ . Para  $l > 1$  (dos últimas columnas de la Tabla 1), este comportamiento se observa sólo para  $\beta=3$ . Aunque las regiones de focalización espacial se sobrelapan a lo largo del eje  $z$ , existe una clara distinción de la separación a lo largo de la dirección radial. De modo que la información contenida en un modo  $l$  es transferida a una región en forma de doughnut de radio  $R_l$ . Este resultado permite imaginar correlación entre unidades de momento angular y zonas circulares de un detector plano localizado en lo que podría considerarse como el plano focal del axicón para haces LG con  $p=0$ . (alrededor de  $z=z_R/2$ ).

### 3. CONCLUSIONES

Hallamos una expresión analítica en términos de una superposición de haces LG elegantes<sup>11</sup> con diferente número modal entero y semientero para el campo de luz con momento angular orbital difractada por un axicón. En la aproximación de elemento óptico delgado esta configuración es equivalente a la de un axicón helicoidal iluminado por una Gaussiana. El parámetro  $\beta$  utilizado aquí corresponde al producto  $\alpha w_0$ , donde  $\alpha$  es el parámetro del axicón



**Tabla 1.** Difracción de un haz LG en el modo  $p=0$  por un axicón, para diferentes órdenes del momento angular  $l$  (filas) y diferentes valores del parámetro  $\beta$  (columnas) del axicón.

---

usado normalmente en la literatura. Nuestros resultados son para el caso de un axicón débil (para valores experimentales típicos,  $w_0=1\text{mm}$  y  $\alpha=30\text{mm}^{-1}$ ,  $\beta=30$ ), que se puede obtener si la diferencia entre los índices de refracción del axicón y del medio en que está inmerso es menor del 5%, como en el caso de fibras ópticas. El campo difractado no presenta las características transversales de la función de Bessel obtenida mediante una aproximación unidimensional de fase estacionaria<sup>8</sup>. Bajo estas condiciones hay una transferencia de información entre el contenido de momento angular de la radiación y la localización espacial de la imagen producida por el axicón, que puede ser usada para asociar diferentes regiones anulares de un detector plano con un valor particular del momento angular.

### AGRADECIMIENTOS

Agradecemos las múltiples y valiosas discusiones con William T. Rhodes y Chris Beetle, acerca de la teoría de difracción bidimensional dentro de la aproximación paraxial.

### REFERENCIAS

1. M. Stuetz, S. Groeblacher, T. Jennewein, and A. Zeilinger, "How to create and detect n-dimensional entangled photons with an active phase hologram," *Appl. Phys. Lett.* **90** pp. 261114, 2007.
2. M. T. Gruneisen, W. A. Miller, R. C. Dymale, and A. M. Sweiti, "Holographic generation of complex fields with spatial light modulators: application to quantum key distribution," *App. Opt.* **47**, pp. A32–A42, 2008.
3. C. J. Zapata-Rodríguez and F. Hernández, "Focal squeeze in axicons," *Opt. Commun.* **254**, pp. 3-9, 2005.
4. D. A. B. Miller, "Communicating with waves between volumes: evaluating orthogonal spatial channels and limits on coupling strengths," *Appl. Opt.* **39**, pp. 1681-1699, 2000.
5. A. Burvall, P. Martinsson and A. T. Friberg, "Communication modes applied to axicons," *Opt. Express* **12**, pp. 377-383, 2004.
6. Z. S. Sacks, D. Rozas, and G. A. Swartzlander, Jr., "Holographic formation of optical-vortex filaments," *J. Opt. Soc. Am. B* **15**, pp. 2226-2234, 1998.
7. V. V. Kotlyar, A. A. Kovalev, R. V. Skidanov, O. Yu. Moiseev, and V. A. Soifer, "Diffraction of a finite-radius plane wave and a Gaussian beam by a helical axicon and a spiral phase plate," *J. Opt. Soc. Am. A* **24**, pp. 1955-1964, 2007.
8. V. Jarutis, R. Paskauskas, and A. Stabinis, "Focusing of Laguerre-Gaussian beams by axicon," *Opt. Commun.* **184**, pp. 105-112, 2000.
9. A. M. A. El-Sayed, "Laguerre polynomials of arbitrary (fractional) orders," *Applied Mathematics and Computation*, **109**, pp. 1-9, 2000.
10. E. W. Weisstein, "Confluent Hypergeometric Function of the First Kind," *MathWorld--A Wolfram Web Resource*. <http://mathworld.wolfram.com/ConfluentHypergeometricFunctionoftheFirstKind.html>.
11. M. A. Bandres and J. Gutierrez-Vega, "Higher-order complex source for elegant Laguerre-Gaussian waves," *Opt. Lett.* **29**, pp. 2213-2215, 2004.
12. I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Table of integrals, series and products*, Academic Press, New York and London, 1965.