Universidad de Pamplona
Facultad de Ciencias Básicas
Departamento de Matemáticas
Proyecto Ecuaciones Diferenciales

Ecuaciones diferenciales en Ingeniería Electrica-Electrónica

Sistemas de Ecuaciones

Se analiza los sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden como modelos matemáticos, algunos de estos modelos no admiten solución analítica, pero pueden ser aproximados mediante algún método numérico. Hasta el momento se ha considerado modelos que involucran ecuaciones diferenciales individuales. Una ecuación diferencial individual puede describir una sola población de un entorno; pero si hay, por decir, dos especies en interacción, y de pronto en competencia, compartiendo un mismo ecosistema, por mencionar, lobos y conejos, entonces el modelo para sus poblaciones $x(t)$ y $y(t)$ podrían ser un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden, tal como,

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= g_1(t,x,y) \\ \frac{dy}{dt} &= g_2(t,x,y), \end{aligned} \tag{1.1}$$

donde g_1 y g_2 son lineales en las variables x y y, es decir, $g_1(t,x,y) = c_1x + c_2y + f_1(t)$ y $g_2(t,x,y) = c_3x + c_4y + f_2(t)$, se dice que 1.1 es un **sistema lineal**; y un sistema de ecuaciones diferenciales que no es lineal se dice que es **no lineal**. Una aplicación muy importante de un sistema no lienal es el **modelo depredador-presa de Lotka-Volterra**, que a su vez, no están dados únicamente para poblaciones en competencia y que pueden ser aplicados a otros ámbitos en nuestro caso a **Redes Eléctricas**.

Salvo por dos soluciones constantes el sistema no lineal dado por el modelo de Lotka-Volterra, no puede resolverse en términos de funciones elementales, no obstante como se mencionó anteriormente se puede hacer una aproximación numérica para representar su solución.

Dicho lo anterior, podemos esbozar un modelo de una red eléctrica con más de una malla también, que también da origen a ecuaciones diferenciales simultáneas. Como se muestra en la Figura 1, la corriente $i_1(t)$ se divide en las direcciones mostradas en el punto B_1, llamado *punto de ramificación de la red*. El sistema de ecuaciones se puede expresar aplicando la **primera y segunda ley de Kirchhoff**

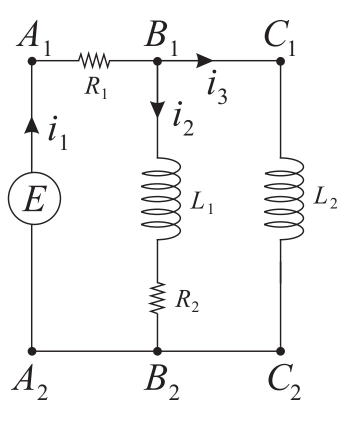

Figura 1: Red Eléctrica

Preguntas

1. Describa teóricamente el **modelo de Lotka-Volterra** aplicado a las redes eléctricas, utilizando para ello la primera y segunda **ley de Kirchhoff**, tomando para ello como base la Figura 1.

2. Describa teóricamente un sistema de ecuaciones diferenciales que describen las corrientes $i_1(t)$ e $i_2(t)$ en una red que contiene un resistor, un inductor y un capacitor.

3. ¿Cuáles son las dos soluciones constantes del sistema no lineal dado por el modelo de Lotka-Volterra, a que se hace referencia anteriormente? Argumente.

4. Desarrolle un programa en MatLab por medio del método de Runge-Kutta (Método numérico que soluciona EDOs) de cuarto orden que permita resolver de forma aproximada un sistema de ecuaciones diferenciales.

5. Con el programa desarrollado, resuelva los siguientes problemas:

   a) El circuito mostrado (transformador) consta de un lado primario (izquierda) y un secundario (derecha). Los dos lados están acoplados inductivamente a través de los inductores mostrados en la Figura 2. Un

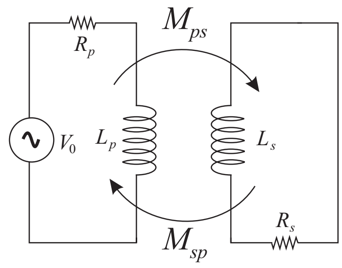

Figura 2: Red Eléctrica

voltaje $V_0(t) = 4\sin(\omega t)$ se imprime en el lado primario por la fuente de voltaje. Las corrientes en los dos circuitos I_p e I_s se determinan resolviendo:

$$\begin{aligned} L_p\frac{dI_p}{dt} + M_{sp}\frac{dI_s}{dt} + R_pI_p &= V_0(t) \\ L_s\frac{dI_s}{dt} + R_sI_s &= -M_{ps}\frac{dI_p}{dt} \end{aligned}$$

donde, I_p e I_s estás dadas en Amperios, $\omega 2\pi f$, $f = 10^5\ Hz$, $L_p = 50\ \mu H$, $L_s = 500\ \mu H$, $R_p = 800\ \Omega$, $R_s = 6\ \Omega$ y $M_{ps} = M_{sp} = 150\ \mu H$ (M es la inductacia mutua). Las condiciones iniciales están dadas por $I_p(0) = I_s(0) = 0$. Resuelva para $0 \leq t \leq 50\ \mu s$

b) La ecuación de Van der Pol es un modelo de un circuito electrónico que surgió en los días de los tubos de vacío:

$$\frac{d^2y}{dt^2} - (1-y^2)\frac{dy}{dt} + y = 0$$

Esta ecuación se puede convertir en un sistema de ecuaciones. Dadas las condiciones iniciales, $y(0) = y'(0) = 1$, resuelva el sistema para $0 \leq t \leq 10$, con un paso de te tamaño: *a*) 0.2 y *b*) 0.1.

c) La ecuación diferencial de segundo orden,

$$\frac{d^2v}{dt^2} = -\frac{1}{RC}\frac{dv}{dt} - \frac{1}{C}\frac{di_L}{dt},$$

representa el modelo dado por el circuito en paralelo dado en la Figura 3, que se puede escribir mediante el siguiente sistema de ecuaciones,

$$\begin{aligned} \frac{di_L}{dt} &= \frac{1}{L}v \\ \frac{dv}{dt} &= -\frac{1}{RC}v - \frac{1}{C}i_L \end{aligned}$$

Resuelva el circuito numéricamente asumiendo que $R = 50\ \Omega$, $L = 1\ H$, $C = 10\ nF$, $v(0) = 3{,}3\ V$, $i_L(0) = 0\ A$. Grafique para $0 \leq t \leq 4\ \mu s$

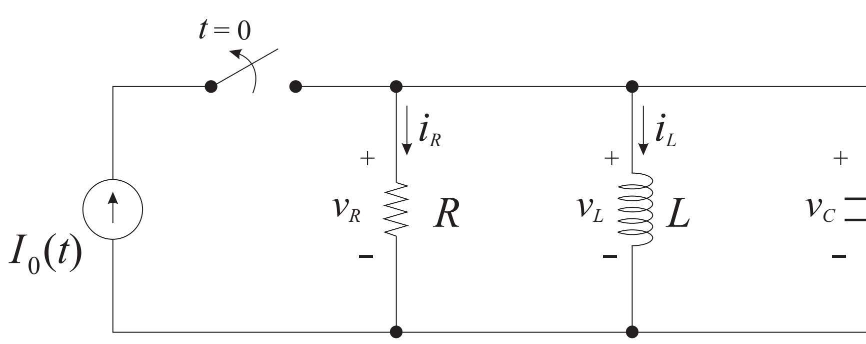

Figura 3: Circuito en paralelo RLC

6. Compare los ejercicios anteriores con la función `ode45` de MatLab. Explique.
7. Encuentre un modelo de la vida real que pueda ser usado a nivel regional o nacional y trate de encontrar su solución aproximada.

En su informe

Presentar los datos de forma clara y ordenada. Es importante la justificación completa de cada respuesta, aquellas que son de análisis y argumentación se deben dar en forma de pequeños ensayos. También debe incluir algunas gráficas de sus datos o soluciones del modelo según sea apropiado.