Universidad de Pamplona
Facultad de Ciencias Básicas
Departamento de Matemáticas
Ecuaciones Diferenciales

ECUACIONES DIFERENCIALES EN FÍSICA - Ecuación del Calor

Tomemos una barra homogénea de longitud l, térmicamente aislada por los lados y lo suficientemente fina como para que en cualquier momento de tiempo se pueda considerar la temperatura igual en todos los puntos de un corte transversal. Si se mantienen los extremos de la barra a temperaturas constantes u_1 y u_2 entonces, como es bien conocido, a lo largo de la barra se establece la distribución lineal de temperatura

$$u(x) = u_1 + \frac{u_2 - u_1}{l}x.$$

En este caso, del extremo más caliente al menos caliente pasará calor. La cantidad de calor que pasa por una sección de la barra de superficie S por la unidad de tiempo, se expresa por la fórmula empírica

$$Q = -k\frac{u_2 - u_1}{l}S = -k\frac{\partial u}{\partial x}S,$$

donde k es el coeficiente de conductividad térmica, que depende del material de la barra.

La magnitud del flujo calorífico se considera positiva, si el calor pasa en dirección del crecimiento de x.

Analicemos el proceso de distribución de la temperatura en la barra. Este proceso puede ser descrito mediante la función $u(x,t)$, que representa la temperatura en el corte x en el tiempo t. La ecuación diferencial parcial que debe satisfacer la función $u(x,t)$ es, en general,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \qquad f(x,t) = \frac{F(x,t)}{c\rho}$$

donde $a^2 = \dfrac{k}{c\rho}$ es una constante llamada *coeficiente de conductividad de temperatura*, c es el calor específico, ρ la densidad de la barra y $F(x,t)$ es la densidad de las fuentes térmicas en el punto x en el tiempo t.

Si suponemos que no hay fuentes de calor en la barra, es decir, $F(x,t) = 0$ y el coeficiente de conductividad de temperatura es 1, usar transformada de Laplace para encontrar la temperatura en la barra en el punto x en el tiempo t suponiendo que inicialmente la temperatura en la barra en cada punto x se describe mediante la función $3\sin(2\pi x)$ y además, la temperatura es $0K$ (Kelvin) en los puntos $x = 0$ y $x = 2$ en cada instante t.

Pasos a seguir:

1. Escribir la ecuación diferencial parcial reemplazando los valores dados de a^2 y $f(x,t)$.

2. Aplicar en ambos lados de la ecuación, transformada de Laplace con respecto a la variable temporal.

3. En el inciso **2.** debe dar como resultado una ecuación diferencial ordinaria lineal de segundo orden no homogénea con respecto a la variable x. Resolverla como suma de la solución de la homogénea y una particular (mediante método de coeficientes indeterminados).

4. Usar transformada de Laplace inversa para encontrar $u(x,t)$.