Universidad de Pamplona
Facultad de Ciencias Básicas
Departamento de Matemáticas
Proyecto de Corte
Ecuaciones Diferenciales
Ingeniería de Sistemas

ERRORES EN APROXIMACIONES NUMÉRICAS

Dentro de las técnicas numéricas más comunes para analizar numéricamente una ecuación diferencial están: el método de Euler, el método de Euler mejorado y el método de Runge-Kutta. La eficacia de éste método depende del tamaño del intervalo Δt. En este laboratorio se comparará la solución numérica con la solución exacta.

1. Use el método de Euler para aproximar la solución del problema de valores iniciales
$$\frac{dy}{dt} = y^2 - 4ty + 4t^2 - 4y + 8t - 3, \quad y(0) = -1.$$
Cómo cambia la aproximación con respecto a cómo varía el cambio del intervalo?. Interprete sus resultados.
2. Use el método de Euler, el método de Euler mejorado y Runge-Kutta para aproximar la solución del problema de valor inicial.
$$\frac{dy}{dt} = 2\sqrt{y}, \quad y(0) = 1.$$
Encuentre la fórmula para la solución y evalúe el error como una función de Δt para cada uno de los métodos. ¿Alguno de los métodos es mejor o peor de lo que esperabas?
3. Repita la parte 2 para el problema de valores iniciales
$$\frac{dy}{dt} = y + t^3 - 6, \quad y(0) = 0.$$

En su informe, debe abordar cada uno de los puntos anteriores. Puede incluir algunas tablas y / o gráficos de cómo el error en sus soluciones aproximadas depende del tamaño del paso. El objetivo de esta práctica de laboratorio es interpretar por qué el error depende del tamaño del paso de la manera que lo hace.

PERDIDOS EN EL ESPACIO

El movimiento de los planetas y los satélites en el espacio se rige por las leyes del movimiento de Newton y la atracción gravitacional.

Con frecuencia se dice que las ecuaciones diferenciales que rigen el movimiento de la luna y los planetas fueron las primeras ecuaciones diferenciales. La capacidad de calcular la posición de los cuerpos celestes (como la luna) fue de gran importancia financiera durante el tiempo de Newton. Conocer la ubicación precisa de la luna y los planetas en un momento dado fue esencial en la navegación del mar abierto. Estas ecuaciones son todavía de gran importancia teórica en el desarrollo de técnicas para el estudio de ecuaciones diferenciales. También son de gran importancia práctica para la navegación espacial. El tipo de técnicas de aproximación numérica, que hemos discutido en el punto anterior, se utilizan para calcular las órbitas de los satélites a la luna y los planetas.

Para este laboratorio, suponga que está en una misión en el espacio profundo, y después de un malentendido, su compañero de habitación lo deja a la deriva en su traje espacial sin combustible. No siendo completamente sin corazón, tu compañero de cuarto también deja una cápsula de escape. Sin embargo, usted y la cápsula de escape están a 100 metros de distancia y ambos están inmóviles:

"No te preocupes"

piensa y utiliza la física:

"Dos objetos se atraen por la fuerza de la gravedad, por lo que la cápsula de escape y yo finalmente nos uniremos"

Supongamos que tu masa (en el traje espacial) es de 150 kg y la masa del la cápsula de escape es 106 kg. Cuanto tiempo te va a tomar para llegar a la cápsula?

Primero necesitamos las ecuaciones diferenciales. Dado que tanto usted como la cápsula comienzan en reposo y la única fuerza es la gravedad, que actúa a lo largo de la línea que lo conecta con la cápsula, solo necesitamos analizar el movimiento en una dirección, la recta que te une con la cápsula.

Sea $x_1(t)$ la posición de la cápsula en el tiempo t y $x_2(t)$ denota tu posición en el tiempo t. Suponemos que las coordenadas se han elegido para que $x_2 > x_1$. Estamos más interesados en la distancia entre usted y la cápsula, así que precisamos analizar $x(t) = x_2(t) - x_1(t)$.

Según las leyes de Newton, sabemos que producto de su masa y su aceleración es igual a la fuerza de la gravedad entre usted y la cápsula y que esta fuerza es proporcional al producto de sus masas dividido por el cuadrado de la distancia. Es decir,

$$150\frac{d^2x_2}{dt^2} = -G\frac{150 \times 10^{-6}}{|x_2 - x_1|^2},$$

donde el signo menos indica que la fuerza está tirando en la dirección opuesta a x_2 y G es la constante de gravitación. Esto es lo mismo que

$$\frac{d^2x_2}{dt^2} = -G\frac{10^{-6}}{|x_2 - x_1|^2},$$

de forma similar la aceleración de la capsula está dada por

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = -G\frac{150}{|x_2 - x_1|^2},$$

como $x(t) = x_2(t) - x_1(t)$, se obtiene la siguiente ecuación diferencial de segundo orden

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -G\frac{150 + 10^6}{x^2} \tag{1}$$

1. Convierta la ecuación diferencial de segundo orden (1) es un sistema de ecuaciones de primer orden.
2. Usando técnicas numéricas, aproxime el tiempo necesario para alcanzar la cápsula de escape, dado que comenzaste a 100 metros de distancia y tanto tú como la cápsula tienen una velocidad inicial 0. ¿A qué velocidad te unirás tú y la cápsula cuando estás a 1 metro de distancia? ? (Puedes usar cualquier método numérico que desee).
3. ¿Puedes verificar que tu cálculo del tiempo que te toma en llegar a la cápsula de escape es cercano a 1 segundo?