Universidad de Pamplona
Facultad de Ciencias Básicas
Departamento de Matemáticas
Proyecto Ecuaciones Diferenciales

---

**Ecuaciones diferenciales en Ingeniería de Sistemas**

**Sistemas de Ecuaciones**

Se analiza los sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden como modelos matemáticos, algunos de estos modelos no admiten solución analítica, pero pueden ser aproximados mediante algún método numérico. Hasta el momento se ha considerado modelos que involucran ecuaciones diferenciales individuales. Una ecuación diferencial individual puede describir una sola población de un entorno; pero si hay, por decir, dos especies en interacción, y de pronto en competencia, compartiendo un mismo ecosistema, por mencionar, lobos y conejos, entonces el modelo para sus poblaciones $x(t)$ y $y(t)$ podrían ser un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden, tal como,

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= g_1(t,x,y) \qquad (1.1) \\ \frac{dy}{dt} &= g_2(t,x,y), \end{aligned}$$

donde $g_1$ y $g_2$ son lineales en las variables $x$ y $y$, es decir, $g_1(t,x,y) = c_1x+c_2y+f_1(t)$ y $g_2(t,x,y) = c_3x + c_4y + f_2(t)$, se dice que 1.1 es un **sistema lineal**; y un sistema de ecuaciones diferenciales que no es lineal se dice que es **no lineal**. Una aplicación muy importante de un sistema no lienal es el **modelo depredador-presa de Lotka-Volterra**.

Salvo por dos soluciones constantes el sistema no lineal dado por el modelo de Lotka-Volterra, no puede resolverse en términos de funciones elementales, no obstante como se mencionó anteriormente se puede hacer una aproximación numérica para representar su solución.

# Preguntas

1. Describa teóricamente el **modelo depredador-presa de Lotka-Volterra**.

2. ¿Cuáles son las dos soluciones constantes del sistema no lineal dado por el modelo de Lotka-Volterra, a que se hace referencia anteriormente? Argumente.

3. Desarrolle un programa en MatLab por medio del método de Runge-Kutta (Método numérico que soluciona EDOs) de cuarto orden que permita resolver de forma aproximada un sistema de ecuaciones diferenciales.

4. Con el programa desarrollado, resuelva los siguientes problemas:

   *a*) Integre el siguiente par de EDOs, de $t = 0$ a 100:

   $$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= 0{,}35y_1 - 1{,}6y_1y_2 \\ \frac{dy_2}{dt} &= 0{,}04y_1y_2 - 0{,}15y_2 \end{aligned}$$

   donde $y_1 = 1$ y $y_2 = 0{,}05$ en $t = 0$. Desarrolle gráficamente la evolución de las especies con respecto al tiempo $t$, desarrolle una gráfica de espacio fásico (es una gráfica de $y_1$ *versus* $y_2$ para $t$). Explique los resultados encontrados.

   *b*) En el estudio de los ecosistemas, a menudo se usan los modelos depredador-presa para estudiar la interacción entre las especies. Considere una población de lobos de la tundra, dada por $W(t)$, y de caribúes, dada por $C(t)$, en el norte de Canadá. La interacción se ha modelado mediante las ecuaciones

$$\begin{aligned}\frac{dC}{dt} &= aC - bCW \\ \frac{dW}{dt} &= -cW + dCW\end{aligned}$$

I. ¿Cuáles valores de $dC/dt$ y $dW/dt$ corresponden a poblaciones estables?

II. ¿Cómo se representaría matemáticamente la afirmación “Los caribúes van hacia la extinción”?

III. Suponga que $a = 0{,}05$, $b = 0{,}001$, $c = 0{,}05$ y $d = 0{,}0001$. Encuentre todas las parejas de poblaciones $(C, W)$ que conducen a poblaciones estables. De acuerdo con este modelo, ¿es posible que las especies vivan en armonía o una de ellas, o ambas, se extinguirán?

*c*) El siguiente sistema describe un sistema depredador presa de tres especies, la especie $x$, la especie $y$ y la especie $z$,

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= 0{,}35x - 0{,}6xz \\ \frac{dy}{dt} &= 0{,}3y - 0{,}5yz \\ \frac{dz}{dt} &= -0{,}37z + 0{,}04xz + 0{,}035yz\end{aligned}$$

en que las poblaciones $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$ se expresan en miles y $t$ en años. Resuelva el sistema por medio del método de Runge-Kutta de cuarto orden. Este modelado debe compararse con la función `ode45` de MatLab, analice las poblaciones en un periodo de 200 años en cada uno de los casos siguientes, utilice dentro de :
$(a)$ $x(0) = 0{,}8$, $y(0) = 2{,}4$ y $z(0) = 0{,}2$. $(b)$ $x(0) = 2$, $y(0) = 1{,}4$ y $z(0) = 1$. $(c)$ Describa lo que sucede en cada una de las situaciones. $(d)$ ¿Cuántas de las especies son presas? ¿Cuántas de las especies son depredadoras?

Elabore un gráfico para cada una de las condiciones iniciales dadas, muy bien argumentado (nombre de los ejes $x$, $y$, etc.).

5. Compare los ejercicios anteriores con la función `ode45` de MatLab. Explique.