

**STUDY OF RAIL VEHICLE DYNAMICS IN CURVED TRACKS.  
PART I: WHEEL-RAIL CONTACT ANALYSIS**

**ESTUDIO DE LA DINÁMICA DE VEHÍCULOS FERROVIARIOS EN TRAMOS  
CURVOS. PARTE I: ANÁLISIS DEL CONTACTO RUEDA-CARRIL**

**PhD(c). Jesús Otero Yugat**

**Universidad Politécnica de Cataluña (UPC)**, Departamento de Ingeniería Mecánica  
Avenida Diagonal, 647. Barcelona, España  
E-mail: [jesus.otero-yugat@upc.edu](mailto:jesus.otero-yugat@upc.edu)

**Abstract:** The present paper outlines the different methodologies used to analyze the dynamics of rail vehicles in curved tracks. The modelling of wheel-rail contact includes the study of the status of normal, longitudinal and tangential forces based on nonlinear hertzian contact theory and Kalker's theory. Generally, the rail vehicle is considered as a set of overlapping rigid bodies, linked to each other by elastic systems and shock absorbers which have performance characteristics correctly defined. Additionally, a comparison between the conventional theories and the formulation based on multibody dynamics is exposed.

**Resumen:** El presente trabajo esboza las diferentes metodologías empleadas para el análisis de la dinámica de vehículos ferroviarios en tramos curvos. La modelización del contacto rueda-carril incluye el estudio del estado de fuerzas normales, longitudinales y tangenciales basado en la teoría no lineal de Hertz y en la teoría de Kalker. Generalmente, el vehículo ferroviario es considerado como un conjunto de masas superpuestas rígidas, ligadas entre sí por sistemas elásticos y amortiguadores que poseen características de funcionamiento bien definidas. Adicionalmente, se expone una comparación entre las teorías convencionales y la formulación basada en la dinámica de sistemas multicuerpo.

**Keywords:** Wheel-rail contact, nonlinear hertzian contact theory, Kalker's theory, multibody dynamics.

## 1. INTRODUCCIÓN

Una red ferroviaria metropolitana se configura principalmente en torno a las líneas que enlazan los núcleos más importantes de la población, así como también a través de los itinerarios que permiten conectar las diferentes localidades de la ciudad. El paso de un tren suburbano produce varios efectos que abarcan desde la generación de vibraciones hasta su transmisión al entorno, provocando así molestias en las zonas aledañas a la vía.

El origen de las vibraciones provocadas por el contacto rueda-carril, se encuentra en las irregularidades de perfil que presentan tanto la rueda como el carril [1]. Entre las posibles irregularidades de la rueda destacan los planos provocados por maniobras de frenado, los cuales representan cambios bruscos de perfil, y por tanto fluctuaciones importantes en la fuerza de contacto.

En el diseño de tramos ferroviarios es de especial interés el estudio de dos aspectos dinámicos del

sistema rueda-carril, como son la estabilidad del movimiento lateral y el comportamiento en curva. En tal sentido, se han desarrollado diferentes investigaciones orientadas a este tipo de análisis, basadas en las teorías convencionales cuya aplicación ofrece resultados aceptables. No obstante, dada la rápida evolución de las técnicas computacionales, ha sido posible la generación de programas fundamentados en la dinámica de sistemas multicuerpo, que simulan el movimiento de trenes que se desplazan a lo largo de vías con geometría arbitraria.

Los modelos clásicos emplean dos postulados concretos: la teoría no lineal de Hertz para el análisis del contacto vertical, y la teoría de Kalker para idealizar el problema tangencial y longitudinal. Por su parte, en la dinámica de sistemas multicuerpo se utilizan conjuntos de coordenadas referidas a sistemas globales e inerciales de referencia [2], en vez de coordenadas referidas a ejes móviles tal como se usa en los modelos convencionales de dinámica de coches ferroviarios.

Ambas alternativas de estudio permiten analizar correctamente la generación de fuerzas derivadas del contacto rueda-carril, las cuales se transmiten a la base de la vía, y de allí se propagan hacia el entorno del entramado suburbano.

## 2. MODELIZACIÓN DE LA FUERZA NORMAL DE CONTACTO

Parte del análisis del contacto rueda-carril, hace referencia a la fuerza normal que se produce debido a la interacción entre ambos. Se han propuesto diversas formulaciones que permiten describir dicha fuerza, entre ellas cabe mencionar la teoría de contacto no lineal de Hertz, que permite relacionar el desplazamiento vertical de la rueda, con el perfil de rugosidad de la misma y el desplazamiento vertical del carril. La relación se establece mediante un muelle de elasticidad no lineal de constante  $K_H$ , según se muestra en la Figura 1.

La obtención de  $K_H$ , se realiza a partir de un análisis de los radios de curvatura presentes tanto en la vista lateral como frontal de la zona de contacto, según se muestra en la Figura 2, siendo  $R_1$ ,  $R_2$  y  $R'_1$ ,  $R'_2$ , los citados radios de curvatura.

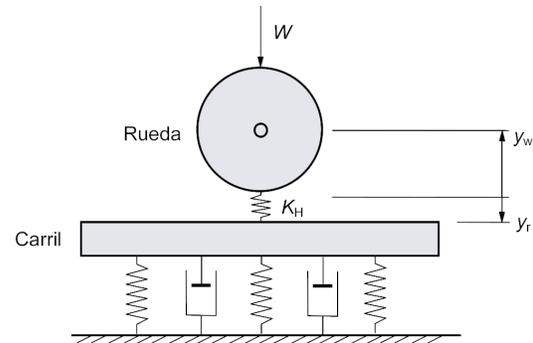


Fig. 1. Esquematización del contacto normal rueda-carril

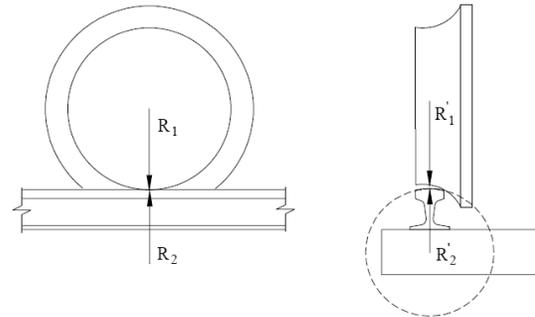


Fig. 2. Vista frontal y lateral de la zona de contacto rueda-carril

$R_1$  representa el radio principal de rodadura de la rueda,  $R_2$  es el radio principal de curvatura del carril en el punto de contacto,  $R'_1$  es el radio de curvatura transversal del perfil de la rueda en el punto de contacto, y  $R'_2$  es el radio de curvatura transversal del perfil del carril en el punto de contacto. Algunos autores [3] han utilizado formulaciones concretas para determinar los coeficientes geométricos  $k_1$  y  $k_2$ , que dependen de tales radios de curvatura; las mismas se representan respectivamente por medio de la Ecuación 1 y 2,

$$k_1 = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R'_1} + \frac{1}{R'_2} \right) \quad (1)$$

$$k_2 = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R'_1} \right)^2 + \left( \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R'_2} \right)^2 + 2 \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R'_1} \right) \left( \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R'_2} \right) \cos 2q \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2)$$

Siendo  $q$  el ángulo de inclinación existente entre el plano que contiene la curvatura principal del carril y el plano con la curvatura principal de la rueda. Se define el coeficiente  $k_3$  relacionado con las propiedades del material, y dependiente del módulo de Young  $E$  y del ratio de Poisson  $\nu$  de la rueda y del carril, según la Ecuación 3.

$$k_3 = \frac{1-\nu^2}{E}; \quad \Phi = \arccos \frac{k_2}{k_1} \quad (3)$$

A partir de los coeficientes geométricos  $k_1$  y  $k_2$ , es posible hallar en tablas específicas [4] los parámetros de cálculo  $m$ ,  $n$  y  $I$  basados en el ángulo  $\Phi$  formado a partir de los planos asociados al carril y a la rueda. De esta forma, se pueden determinar las dimensiones  $a$  y  $b$  del área elíptica de contacto rueda-carril, atendiendo a la Ecuación 4, donde  $W$  es la carga estática presente en la zona de interacción, equivalente al aporte del peso de un vagón sobre una rueda.

$$a = m \left( \frac{3pk_3W}{2k_1} \right)^{\frac{1}{3}}; \quad b = n \left( \frac{3pk_3W}{2k_1} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (4)$$

Sobre la base de lo anterior, la constante de elasticidad no lineal  $K_H$ , se puede describir por medio de la Ecuación 5.

$$K_H = \frac{4}{3k_3} \sqrt{\frac{2}{k_1 I^3}} \quad (5)$$

Diversas investigaciones [1, 3] han utilizado la teoría no lineal de Hertz basándose en las siguientes hipótesis: el comportamiento de los cuerpos que interactúan es elástico, los radios de curvatura son significativamente mayores a las dimensiones del área elíptica de contacto, y las curvaturas dentro de la zona de contacto son constantes. A partir de dichas hipótesis se ha formulado la fuerza de contacto rueda-carril mediante lo expresado en la Ecuación 6, donde  $y_c$  representa el desplazamiento vertical del carril,  $y_r$  el desplazamiento vertical de la rueda,  $r$  el radio de la rueda y  $e$  el perfil de irregularidad de la misma.

$$F = \begin{cases} K_H d^{3/2} & d = y_c - y_r + r - e(t) > 0 \\ 0 & d = y_c - y_r + r - e(t) \leq 0 \end{cases} \quad (6)$$

Un estudio reciente [5] ha permitido conocer los alcances y la viabilidad de la aplicación de esta teoría de contacto; dicha investigación incluye diversas posiciones relativas entre la rueda y el carril, con sus respectivas áreas de contacto originadas de acuerdo a tales posiciones. Por medio del empleo de recursos computacionales y de la metodología de elementos finitos, se han realizado cálculos numéricos de las distribuciones de la presión de contacto, obteniendo que la teoría de Hertz ofrece resultados próximos a la realidad, si la zona de contacto se encuentra enmarcada dentro del perfil del carril.

### 3. MODELIZACIÓN DE LA DINÁMICA TANGENCIAL Y LONGITUDINAL

El bastidor de un bogie está fuertemente relacionado con el cuerpo de un vagón a través de los elementos que conforman la suspensión [6]. Tales vínculos generan en la zona de contacto rueda-carril, fuerzas significativas cuando un tren circula a través de los tramos curvos de una vía, denotadas como  $F_x$  para el caso de las fuerzas longitudinales y  $F_y$  para las laterales, representadas en el plano  $OY$  de la vía según la Figura 3.

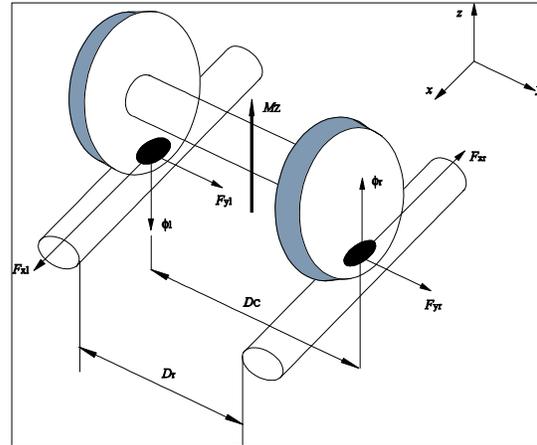


Fig. 3. Dinámica lateral y longitudinal del contacto rueda-carril

Los subíndices  $l$  y  $r$  hacen referencia respectivamente a aquellas fuerzas originadas en el carril izquierdo y en el derecho. Las fuerzas longitudinales actuantes en cada zona de contacto se encuentran separadas por la distancia de contacto  $D_c$  entre carriles, produciendo un momento de enlace  $M_z$  respecto al eje normal al carril, visto en cada uno de los ejes del bogie y reflejado por medio de la Ecuación 7.

$$M_z = F_{xr} \frac{D_c}{2} + F_{xl} \frac{D_c}{2} \quad (7)$$

Para el caso de una interacción rueda-carril no lineal de Hertz, estas fuerzas dependen de las velocidades relativas entre los dos cuerpos en contacto. No obstante, Kalker [7] ha planteado expresiones generales que permiten determinar dichas fuerzas, teniendo en cuenta diversos coeficientes de rigidez  $c_{ij}$  asociados para cada caso, así como también el módulo de rigidez del material  $G$ , y las dimensiones  $a$  y  $b$  del área elíptica de contacto. Las ecuaciones 8 y 9 muestran las formulaciones que conllevan respectivamente al cálculo de la fuerza longitudinal, de la fuerza tangencial y de la fuerza por deslizamiento  $F_{spin}$ .

$$F_x = -Gabc_{11}v_x; \quad F_y = -Gabc_{22}v_y \quad (8)$$

$$F_{\text{spin}} = -Ga^{3/2}b^{3/2}c_{23}\mathbf{j} \quad (9)$$

Siendo  $v_x$ ,  $v_y$  y  $\mathbf{j}$ , los pseudodeslizamientos en las direcciones longitudinal, lateral y de deslizamiento. No obstante, algunos autores [8] han simplificado y linealizado las formulaciones previamente mostradas a través del arreglo matricial mostrado en la Ecuación 10, donde  $M_j$  es el momento derivado de la fuerza provocada por deslizamiento

$$\begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \\ M_j \end{Bmatrix} = -Gab \begin{bmatrix} c_{11} & 0 & 0 \\ 0 & c_{22} & \sqrt{abc_{23}} \\ 0 & -\sqrt{abc_{23}} & abc_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_x \\ v_y \\ \mathbf{j} \end{Bmatrix} \quad (10)$$

De manera análoga a la situación existente en el análisis de la fuerza vertical de contacto, la teoría lineal de Kalker ofrece resultados coherentes y aceptables para cuando el deslizamiento de la rueda es muy pequeño; en caso contrario, el arreglo arriba especificado deja de ser viable en virtud de que no se incluye el efecto de la saturación de las fuerzas originadas por la fricción.

Si se desea considerar las consecuencias originadas por la fuerza de roce y obtener resultados cercanos a los provenientes de la formulación no lineal, se ha propuesto un procedimiento heurístico que se inicia a partir del estado de fuerzas presente tanto en la dirección longitudinal como lateral, establecido por medio del modelo linealizado de Kalker previamente detallado. Para ello, se calcula la fuerza equivalente  $F_u$  atendiendo a lo señalado por la Ecuación 11.

$$F_u = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \quad (11)$$

Teniendo en cuenta esta fuerza de arrastre equivalente, se establece una comparación con respecto a la fuerza de enlace límite que garantiza el no deslizamiento, calculada mediante la fuerza normal de contacto  $F$  y el coeficiente de fricción  $\mathbf{m}$ , con la finalidad de establecer el valor de la fuerza de arrastre  $F'_u$  que se obtendría de aplicar la teoría no lineal de Kalker. La mencionada comparación debe seguir el criterio estipulado en la Ecuación 12.

$$F'_u = \begin{cases} \mathbf{m}F \left[ \left( \frac{F_u}{\mathbf{m}F} \right) - \frac{1}{3} \left( \frac{F_u}{\mathbf{m}F} \right)^2 \right] & F_u \leq 3\mathbf{m}F \\ \mathbf{m}F & F_u > 3\mathbf{m}F \end{cases} \quad (12)$$

Con esta nueva fuerza, se corrige el valor de las fuerzas longitudinal y tangencial de acuerdo a lo fijado por la Ecuación 13, a fin de que se aproximen a lo que realmente se adquiriría de utilizar la formulación no lineal.

$$F'_x = \frac{F'_u}{F_u} F_x; \quad F'_y = \frac{F'_u}{F_u} F_y \quad (13)$$

Esta aproximación ofrece resultados más cercanos a la realidad del estado dinámico tangencial y longitudinal de una rueda que se desplaza sobre un tramo curvo; sin embargo no toma en consideración el momento causado por la fuerza de arrastre por deslizamiento. En este sentido, Polach [9] ha diseñado un algoritmo de cálculo que permite hallar las componentes lateral y longitudinal de la fuerza de arrastre, teniendo presente los efectos del deslizamiento. Dicho algoritmo se fundamenta a la teoría no lineal de Kalker y atiende a lo establecido en la Ecuación 14,

$$F'_x = F_F \frac{\mathbf{u}_x}{\mathbf{u}_c}; \quad F'_y = F_F \frac{\mathbf{u}_y}{\mathbf{u}_c} + F_{\text{spin}} \frac{\mathbf{j}}{\mathbf{u}_c} \quad (14)$$

Donde  $F_F$  es la fuerza de contacto tangencial causada por el fenómeno de arrastre en la dirección longitudinal y lateral, mientras que  $\mathbf{u}_c$  es un parámetro que define los efectos del arrastre por deslizamiento. A pesar de que este método permite simplificar la formulación no lineal de la dinámica tangencial, presenta el inconveniente de que necesita conocer las condiciones iniciales vinculadas con los desplazamientos  $v_x$ ,  $v_y$  y  $\mathbf{j}$ .

Por otra parte, el trabajo llevado a cabo por [10] ha formulado una teoría tridimensional asociada a un espacio en forma elíptica, adaptable al área de contacto rueda-carril. La superficie de contacto se divide en dos regiones elípticas asimétricas: una de deslizamiento y otra de adhesión, tal como se muestra en la Figura 4.

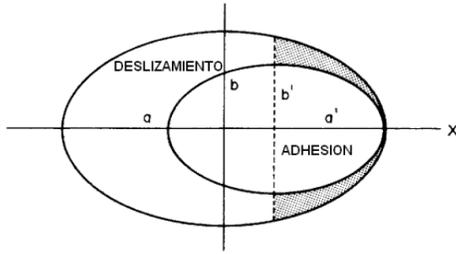


Fig. 4. Elipse de adhesión y deslizamiento según [10]

Se observa que el eje axial de la elipse de adhesión coincide con el eje axial de la elipse de la zona de contacto, y que ambas elipses se tocan en su punto más extremo. Sin embargo, este postulado tiene una limitación importante basada en el hecho de que no tiene en cuenta el efecto del giro, por lo que su uso está restringido en la situación en que exista giro, es decir, se tengan pseudodeslizamientos longitudinal y transversal puros.

#### 4. MODELIZACIÓN BASADA EN LA DINÁMICA DE SISTEMAS MULTICUERPO

Mediante el modelado por sistemas multicuerpo, es posible proyectar las ecuaciones de movimiento del sistema ferroviario, de tal forma que se obtengan los movimientos estacionarios en vías curvas como puntos de equilibrio, simplificando de esta manera la determinación de dichos movimientos. Según lo expuesto en [2, 11, 12] las ecuaciones de movimiento de un vehículo ferroviario vienen establecidas por la Ecuación 15.

$$M(q)\ddot{q} + C_q^T(q,t)\mathbf{I} = Q_v(q,\dot{q}) + Q_{\text{ext}}(q,\dot{q}) \quad (15)$$

$$C(q,t) = 0$$

donde  $q = [r^w, \mathbf{q}^w]^T$  es el vector de coordenadas generalizadas que contiene las posiciones y orientaciones de los sistemas de referencia asociados a los sólidos que forman el coche del tren con respecto al sistema global de coordenadas,  $M$  es la matriz de inercia,  $C$  es el vector de restricciones cinemáticas vinculadas con pares cinemáticos, la velocidad de avance del ferrocarril y a los parámetros de Euler  $\mathbf{q}^w$ ,  $C_q$  es la matriz jacobiana de tales restricciones con respecto al vector de coordenadas generalizadas,  $\mathbf{I}$  es el vector de multiplicadores de Langrange asociados a las restricciones cinemáticas,  $Q_v$  es el vector de fuerzas de inercia cuadráticas de velocidad, y  $Q_{\text{ext}}$  es el vector de fuerzas externas generalizadas que incluye el peso del vehículo, las fuerzas normales

de contacto, y las fuerzas y momentos tangenciales de contacto.

Las ecuaciones de movimiento pueden ser usadas para el análisis del desplazamiento de un eje ferroviario en cualquier tipo de vía, empleando la teoría no lineal de Kalker [7] para determinar las fuerzas laterales y longitudinales de contacto, y un método elástico para el cálculo de las fuerzas normales de contacto [11, 12]. El análisis se realiza por medio del uso de coordenadas concretadas con respecto a un sistema de referencia móvil que avanza a lo largo de la vía, igual al especificado en la Figura 5.

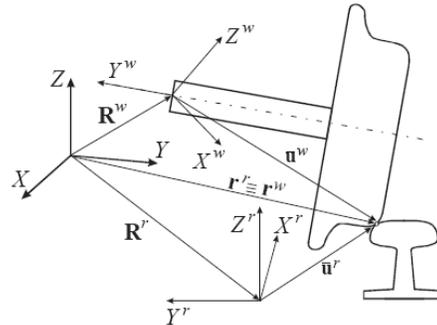


Fig. 5. Coordenadas empleadas en el modelo basado en la dinámica de sistemas multicuerpo de acuerdo a [11]

Las nuevas coordenadas son constantes en su mayoría para cualquier movimiento estacionario, por lo que es necesaria una doble transformación de coordenadas, para convertir el sistema de la Ecuación 15 en un sistema de ecuaciones algebraicas de sencilla solución, para obtener dichos movimientos estacionarios y su estabilidad. De esta forma se origina un vector de coordenadas generalizadas  $z = [r^{w^i}, \mathbf{q}^{w^i}, \mathbf{g}]^T$ , en el que el vector de parámetros de Euler  $\mathbf{q}^{w^i}$  describe la orientación del sistema de referencia intermedio con respecto al de la vía, mientras que el ángulo  $\mathbf{g}$  es el formado en todo instante entre el sistema de referencia del eje y el intermedio.

En vista de que la posición y orientación del sistema de referencia de la vía viene dada en función del tiempo, es posible realizar la doble transformación, modificando la Ecuación 15 para obtener la formulación de movimiento escrita en términos de las nuevas coordenadas y proyectadas en el sistema de referencia móvil, atendiendo a lo reflejado en la Ecuación 16.

$$\begin{aligned}
 &M(z)\ddot{q}(z, \dot{z}, \ddot{z}) \\
 &+C_q^T(z, t)\dot{I} = Q_v(z, \dot{z}) + Q_{ext}(z, \dot{z}); \quad (16) \\
 &C(z, t) = 0
 \end{aligned}$$

La expresión anterior permite precisar la dinámica del sistema ferroviario. Mediante la misma, es posible incluir los parámetros de inercia, rigidez y amortiguamiento de las suspensiones primaria y secundaria del bogie del coche, además de variar la geometría de la rueda y el perfil del carril en función de las características de la vía y del tren.

Sin embargo, el uso de un modelo de sistemas multicuerpo está destinado al estudio del estado dinámico entre la rueda y el carril, permitiendo así estudiar la evolución de las fuerzas tridimensionales actuantes al paso de un tren; por consiguiente, si se desea analizar parámetros como el desgaste de la cabeza del carril o de la periferia de la rueda, la influencia del perfil de irregularidad de la rueda en la generación de vibraciones, o la presencia de planos en la misma, los sistemas multicuerpos se vuelven complejos e inviables en el ámbito computacional. En consecuencia, las teorías convencionales son una alternativa correcta que ofrece predicciones cercanas al comportamiento dinámico y vibratorio del equipamiento ferroviario al paso de un tren.

## 5. CONCLUSIONES

Se han esquematizado las principales teorías y formulaciones empleadas en el modelo de la dinámica de contacto rueda-carril, analizando sus respectivos alcances y aplicabilidad.

Los modelos clásicos utilizados para analizar la dinámica del contacto rueda-carril, poseen el objetivo concreto de estimar la vibración de un punto del carril al paso de un ferrocarril metropolitano, con diferentes características en la superficie de sus ruedas.

Al estar el problema lateral y longitudinal de contacto estrechamente relacionado con el estado dinámico normal, el cálculo de las fuerzas tridimensionales motivadas al contacto rueda-carril se debe realizar de manera simultánea, acoplando las ecuaciones establecidas por las teorías convencionales detalladas.

El método de análisis dinámico de vehículos ferroviarios basado en las ecuaciones de sistemas

multicuerpo, permite un análisis eficiente de la estabilidad de un vagón en vías curvas, pero no representan una opción viable en el momento de estudiar la dinámica vibratoria derivada del contacto rueda-carril.

## 6. REFERENCIAS

- [1] Wu, T.X., Thompson, D.J. *A hybrid model for the noise generation due to railway wheel flats*. Journal of Sound and Vibration 251(1), 2002, pp. 115 – 139.
- [2] Shabana, A.A., Berzeri, M., Sany, J.R. *Numerical procedure for the simulation of wheel/rail contact dynamics*. Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control. 123(2), 2001, pp. 168 – 178.
- [3] Thompson, D.J., Monk-Steel, A.D., Jones, C.J.C., Allen, P.D., Hsu, S.S., Iwnicki, S.D. *Railway Noise: Curve Squeal, Roughness Growth, Friction and Wear*. Rail Research UK, 2003, pp. 1 – 51.
- [4] Norton, R.L. *Diseño de máquinas. Primera Edición*. Prentice Hall. 1999.
- [5] Yan, W., Fischer, F.D. *Applicability of the Hertz contact theory to rail-wheel contact problems*. Archive of Applied Mechanics 70, 2000, pp. 255 – 268.
- [6] Iwnicki, S.D. *Handbook of railway vehicle dynamics*. Taylor and Francis Group. 2006.
- [7] Kalker, J.J. *Three dimensional elastic bodies in rolling contact*. Kluwer Academic, Dordrecht, 1990.
- [8] Pombo, J., Ambrósio, J., Silva, M. *A new wheel-rail contact model for railway dynamics*. Vehicle System Dynamics. 45(2), 2007, pp. 165 – 189.
- [9] Polach, O. *A fast wheel-rail forces calculation computer code*. Vehicle System Dynamics Supplement. 33, 1999, pp. 728 – 739.
- [10] Johnson, K.L., Vermeulen, P.J. *Contact of non-spherical bodies transmitting tangential forces*. Journal of Applied Mechanics Science. 31, 1964, pp 338 – 340.
- [11] Shabana, A.A., Zaazaa, K.E., Escalona, J.L., Sany, J.R. *Development of elastic force model for wheel/rail contact models*. Journal of Sound and Vibration 269(1), 2004, pp. 295 – 325.
- [12] Shabana, A.A., Tobaa, M., Sugiyama, H., Zaazaa, K.E. *On the computer formulations of the wheel/rail contact problem*. Nonlinear Dynamics 40(2), 2005, pp. 169 – 193.