

**MODELING, DESIGN AND IMPLEMENTATION CONTROL OF SWING UP  
AND SWINGING OF AN INVERTED ROTARY PENDULUM****MODELADO, DISEÑO E IMPLEMENTACION DEL CONTROL DE SWING UP  
Y BALANCEO AL PENDULO INVERTIDO ROTACIONAL****MSc. Oscar Oswaldo Rodriguez, Ing. John Caipa Roldán, Ing. José Luis Rodríguez.****Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia**

Escuela de Ingeniería Electrónica, Sogamoso - Boyacá

E-mail: {oscarorodriguez, johncaipa2}@yahoo.es, joseloh\_5@hotmail.com

**Abstract:** This paper presents the description, simulation and control of one of the non lineal systems more studied for carrying out demonstrations of lineal and non lineal control laws: the Inverted Rotary Pendulum or Furuta Pendulum, which consists on a motor, an arm that rotates in the horizontal plane and a pendulum joined to one of hedges which is able to rotate in the vertical plane freely. The design of a system of lineal control will be presented based on location of poles, with the objective to maintain the pendulum in its point of unstable balance (swinging control); besides the implementation of a law of non lineal control to approach the subproblema of taking the pendulum from its position of rest to invested proximities, to give complete solution to the problem of Swing Up. The non lineal pattern is built in Matlab -Simulink with the purpose of checking the control in simulation then to implement the control on the built prototype.

**Keywords:** Discrete control, pendulum, sliding mode control, state-space.

**Resumen:** Este artículo presenta la descripción, simulación y control de uno de los sistemas no lineales más estudiados para realizar demostraciones de leyes de control lineales y no lineales: el Péndulo Invertido Rotacional o *Péndulo de Furuta*, el cual consiste en un motor, un brazo que rota en el plano horizontal y de un péndulo unido a uno sus extremos que es libre de rotar en el plano vertical. Se presentará el diseño de un sistema de control lineal basado en ubicación de polos, con el objetivo de mantener el péndulo en su punto de equilibrio inestable (control de balanceo); además de la implementación de una ley de control no lineal para abordar el subproblema de llevar el péndulo de su posición de reposo a las cercanías de la invertida, para dar solución completa al problema de Swing Up. Se construye el modelo no lineal en Simulink de Matlab con el fin de comprobar el control en simulación para luego implementar el control sobre el prototipo construido.

**Palabras clave:** Control discreto, péndulo, control modos deslizantes, espacio de estados.

**1. INTRODUCCION**

El péndulo de Furuta es un sistema subactuado de dos grados de libertad y altamente no lineal desarrollado por Katsuhisa Furuta y sus colegas (Furuta et al. (1992), Xu et al. (2001), Furuta and

Iwase (2004), Iwase et al. (2006)). Desde entonces, cientos de artículos y tesis han usado este sistema para realizar demostraciones de leyes de control lineales y no lineales (Åkesson and Åstrom (2001), Olfati-Saber (2001)), Además el sistema ha sido sujeto de dos textos (Fantoni and Lozano (2002),

Egeland and Gravdahl (2002)). A pesar de la cantidad de atención que ha recibido, muy pocas publicaciones han usado la dinámica completa (Cazzolato and Prime (2008)), unos pocos autores (Xu et al. (2001), Iwase et al. (2006), Åkesson and Åström (2001), Hirata et al. (2006), Ratiroch Anant et al. (2004), Baba et al. (2006)) han considerado péndulos delgados y simétricos con el fin de simplificar la dinámica, dos artículos (Craig and Awtar (2005), Awtar et al. (2002)) se han incluido los tres términos de inercia de el péndulo, pero en la mayoría se desprecian los coeficientes de fricción y la dinámica del motor.

Los sistemas mecánicos subactuados, poseen pocas entradas de control (en este caso solo una), aparecen en un amplio rango de aplicaciones incluyendo robótica, sistemas aeroespaciales, sistemas móviles, etc. Entre los sistemas subactuados de este tipo se encuentran el Acrobot, el Pendubot, el sistema Cart-Pole, el sistema Beam-and-Ball, el sistema TORA (translational rotational actuator), entre otros.

El problema de llevar el péndulo desde la posición de reposo a la invertida (vertical arriba) se conoce como "swing up", por lo que en el problema de control del péndulo aparecen 2 subproblemas: el de llevar el péndulo desde su posición de reposo a las proximidades de la posición deseada, y el de estabilizar el péndulo en la posición invertida, como lo expresa (Aracil (2005)). Entre las estrategias de control desarrolladas las más importantes se basan en control híbrido, control conmutado y el control basado en energía (Astrom00).

En este artículo se empleará la dinámica del sistema No Lineal presentada por (Cazzolato08), donde se incluye la dinámica dada por el motor DC y algunos términos de fricción, con el fin de implementar el modelo no lineal en Simulink de Matlab, en el cual además se realizará la construcción del control de balanceo y de Swing Up tanto para el modelo simulado como para el prototipo, con el fin de realizar la comparación.

El documento esta organizado de la siguiente manera: en la siguiente sección se presenta la descripción de la dinámica del péndulo y el modelo matemático el cual incluye la dinámica del motor, en la sección 3 se construye el modelo linealizado entorno al punto de equilibrio inestable, con base en este, en la sección 4 se realiza el análisis de estabilidad, controlabilidad y observabilidad del sistema tanto en tiempo continuo como en discreto;

la sección 5 esta dedicada al diseño de los controles, y por ultimo en la sección 6 se entregan los resultados en simulación y sobre el prototipo.

## 2. DINAMICA DEL PENDULO INVERTIDO ROTACIONAL

### 2.1 Descripción

El péndulo como se observa en la figura 1 (Fuente: Cazzolato08) esta montado sobre un motor DC, usado para aplicar un torque ( $\tau$ ) al brazo el cual rota en el plano horizontal, acoplado a este se encuentra el péndulo quien puede rotar libremente en el plano vertical. El brazo y el péndulo tienen longitudes  $L_1$  y  $L_2$  y masas  $m_1$  y  $m_2$  a una distancia  $l_1$  y  $l_2$  respecto a su centro de masa, con momentos de inercia  $J_1$  y  $J_2$  respectivamente.

El momento total de inercia del brazo sobre la punta del eje es  $J_1$  y la inercia total del péndulo sobre la punta de su eje es  $J_2$ . Cada unión rotacional tiene coeficientes de amortiguamiento viscoso  $b_1$  y  $b_2$ , donde  $b_1$  es el amortiguamiento suministrado por las escobillas del motor y  $b_2$  es el amortiguamiento proveniente de la conexión entre el brazo y el péndulo.

Para definir las entradas se ha usado el sistema coordenado dado por la regla de la mano derecha, La rotación angular del brazo ( $\theta_1$ ) es medida en el plano horizontal en dirección opuesta de las manecillas del reloj (positiva). La rotación angular del péndulo ( $\theta_2$ ) es medida en el plano vertical en dirección opuesta de las manecillas del reloj (positiva); cuando el péndulo esta suspendido en equilibrio estable (abajo) la posición es  $\theta_2 = 0$ .

El torque que el motor aplica al brazo ( $\tau$ ) es positivo en la dirección opuesta a las manecillas del reloj.

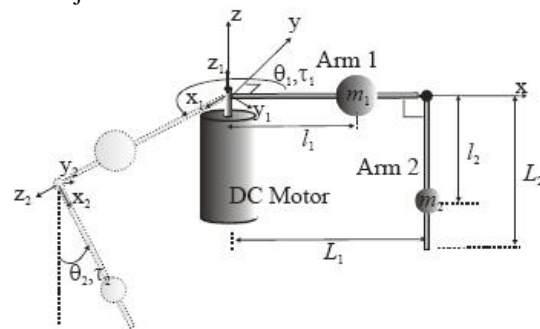


Fig. 1. Descripción física péndulo invertido rotacional.

## 2.2 Conjeturas

Con el fin entregar la dinámica del sistema se dan los siguientes supuestos:

- La unión entre el eje del motor y el brazo es rígida.
- Se da por hecho que el brazo y el péndulo son rígidos y delgados.
- La inercia del rotor del motor se asume despreciable.
- Solo el amortiguamiento viscoso es considerado.
- Otras fricciones no son tenidas en cuenta.

## 2.3 Modelo Matemático

La formulación del Lagrangiano es utilizada para deducir la dinámica completa del sistema. Las ecuaciones (1 y 2) dan el modelo *no lineal* que describe la dinámica del sistema deducidas por (Cazzolato08).

$$\ddot{\theta}_1 (J_0 + J_2 \sin^2(\theta_2)) + a_1 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_2) - a_1 \sin(\theta_2) \dot{\theta}_2^2 + J_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(2\theta_2) + b_1 \dot{\theta}_1 = \tau \quad (1)$$

$$a_1 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_2) + J_2 \ddot{\theta}_2 - \frac{1}{2} J_2 \dot{\theta}_1^2 \sin(2\theta_2) + b_2 \dot{\theta}_2 + a_2 \sin(\theta_2) = 0 \quad (2)$$

Donde:

$$\begin{aligned} a_1 &= m_2 L_1 l_2 \\ a_2 &= g m_2 l_2 \\ J_1 &= j_1 + m_1 l_1^2 \\ J_2 &= j_2 + m_2 l_2^2 \\ J_0 &= J_1 + m_2 L_1^2 \end{aligned}$$

## 2.4 Modelo Motor DC

La ecuación diferencial que describe el subsistema para un motor DC usado en el péndulo de Furuta puede deducirse por medio de la ley de Kirchhoff de voltaje como se muestra en la ecuación (3)

$$L_m \dot{i} + R_m i + K_m \dot{\theta}_1 = V \quad (3)$$

Donde:

- V = Voltaje aplicado al motor.
- i = Corriente que fluye a través del motor.
- K<sub>m</sub> = Constante electromotriz y del torque.
- L<sub>m</sub> = Inductancia eléctrica del motor.
- R<sub>m</sub> = Resistencia eléctrica del motor.

El torque producido por el motor DC esta dado por la ecuación (4)

$$\tau = K_m i \quad (4)$$

## 3. OBTENCION MODELO LINEAL

Para la obtención del modelo linealizado se necesita acomodar la dinámica del sistema dada por las ecuaciones (1 y 2) junto con las ecuaciones (3 y 4) a la representación en espacio de estados, donde se incluye otra variable de estado: X<sub>5</sub>=i. El vector de estado corresponde al mostrado en la ecuación (5)

$$[x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5]^T = [\theta_1 \ \theta_2 \ \dot{\theta}_1 \ \dot{\theta}_2 \ i]^T \quad (5)$$

### 3.1 Puntos de equilibrio

Haciendo cero las ecuaciones de estado no lineales se obtiene los puntos de equilibrio dados por (6)

$$x_{ieq} = [0 \ \pi \ 0 \ 0 \ 0]^T \quad (6)$$

Los puntos de equilibrio importantes del sistema corresponden a la posición vertical-arriba (equilibrio inestable) representado por la ecuación (7) y posición vertical-abajo (equilibrio estable) representado por la ecuación (8)

$$x_{ieq1} = [0 \ \pi \ 0 \ 0 \ 0]^T \quad (7)$$

$$x_{ieq2} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T \quad (8)$$

### 3.2 Linealización

Realizando la linealización alrededor del punto de equilibrio inestable dado en la ecuación (7) se obtiene el sistema lineal en espacio de estado mostrado en la ecuación (9).

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & A_{32} & A_{33} & A_{34} & B_{31} K_m \\ 0 & A_{42} & A_{43} & A_{44} & B_{41} K_m \\ 0 & 0 & -\frac{K_m}{L_m} & 0 & -\frac{R_m}{L_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L_m} \end{bmatrix} V \quad (9)$$

Donde:

$$\begin{aligned} A_{32} &= \frac{a_1 a_2}{J_0 J_2 - a_1^2} & A_{42} &= \frac{a_2 J_0}{J_0 J_2 - a_1^2} \\ A_{33} &= \frac{-J_2 b_1}{J_0 J_2 - a_1^2} & A_{43} &= \frac{-a_1 b_1}{J_0 J_2 - a_1^2} \\ A_{34} &= \frac{-a_1 b_2}{J_0 J_2 - a_1^2} & A_{44} &= \frac{-b_2 J_0}{J_0 J_2 - a_1^2} \\ B_{31} &= \frac{J_2}{J_0 J_2 - a_1^2} & B_{41} &= \frac{a_1}{J_0 J_2 - a_1^2} \end{aligned}$$

La salida del sistema esta dada por la ecuación (10) Esta representa las variables medibles físicamente del sistema real, en este caso son las posiciones (?<sub>1</sub> y ?<sub>2</sub>).

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \quad (10)$$

### 3.3 Identificación de Parámetros

Los parámetros del modelo son tomados del prototipo de Péndulo Invertido Rotacional desarrollado por los autores del artículo (fig. 2), dichos parámetros se encuentran en la Tabla 1.



Fig.2. Prototipo de Péndulo Invertido Rotacional.

Tabla 1: Parámetros del Prototipo

Descripción	Notación	Valor	Unidades
Parámetros Motor			
Inductancia	$L_m$	1.97	mH
Resistencia	$R_m$	1.85	$\Omega$
Constante torque	$K_m$	0.0424	Nm/A
Coefficiente viscoso	$b_1$	3.7E-6	Nms/rad
Parámetros Brazo			
Longitud	$L_1$	0.15	m
Longitud al C.M.	$l_1$	0.023	m
Masa	$m_1$	0.17	kg
Momento Inercia en C.M.	$j_1$	0.0016	kgm <sup>2</sup>
Coefficiente viscoso	$b_2$	1E-4	Nms/rad
Parámetros Péndulo			
Longitud	$L_2$	0.21	m
Longitud al C.M.	$l_2$	0.0865	m
Masa	$m_2$	0.03	kg
Momento Inercia en C.M.	$j_2$	2.081E-4	kgm <sup>2</sup>
Constante gravitacional	$g$	9.81	m/s <sup>2</sup>

## 4. ESTABILIDAD, CONTROLABILIDAD Y OBSERVABILIDAD

### 4.1 Estabilidad

Reemplazando los respectivos valores de los parámetros en el modelo linealizado dado por la ecuación (9) se calcula los valores propios del sistema, los cuales son:

$$\lambda_i = [0 \quad -938.6037 \quad 8.1438 \quad -8.4871 \quad -0.4125] \quad (11)$$

Como se puede apreciar aparte de tener un valor propio en cero, el sistema tiene un valor en el semiplano derecho por lo que en este punto de equilibrio el sistema es *inestable* (equilibrio inestable). Para evaluar el tipo de comportamiento del sistema en este punto de equilibrio se realizó la simulación del sistema **no lineal** en Simulink de Matlab, donde se obtuvo la respuesta que se muestra en la figura 3 ante una condición inicial cercana al punto de equilibrio inestable.

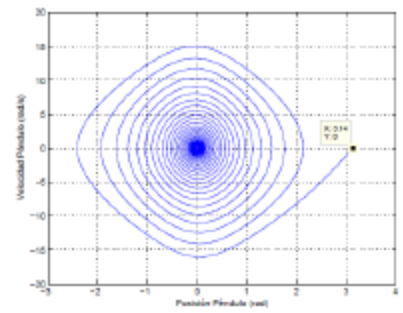


Fig.3. Respuesta del sistema no lineal ante condición inicial cerca del punto de equilibrio inestable.

Como se puede apreciar el punto de equilibrio inestable dado por la ecuación (7) se comporta como un tipo fuente (cualquier condición inicial cercana no termina en este punto), además se puede apreciar que el punto de equilibrio dado por la ecuación (8), el cual es estable, tiene un comportamiento de tipo pozo (cualquier condición inicial cercana o lejana termina en este punto).

### 4.2 Controlabilidad y Observabilidad.

El sistema linealizado descrito por las ecuaciones de estado (9 y 10) es controlable si y solo si la matriz de controlabilidad ( $Co = [B \quad AB \dots A^4B]$ ) tiene rango 5, y es observable si y solo si la matriz de observabilidad ( $Ob = [C \quad CA \dots CA^4]^T$ ) Realizando la construcción de las matrices  $Co$ ,  $Ob$  y evaluando el rango se obtiene:

$$rank(Co) = 5 \text{ y } rank(Ob) = 5.$$

Entonces el sistema es de estado totalmente *controlable* y *observable* en este punto de equilibrio.

Se procede a evaluar la controlabilidad y observabilidad del sistema discretizado con un periodo de muestreo  $T_s = 0.0067$ seg (150Hz), realizando la construcción de ( $Cod$ ), ( $Obd$ ) y evaluando el rango se obtiene:  $rank(Cod) = 5$  y  $rank(Obd) = 5$ . Entonces el sistema discretizado es de estado totalmente *controlable* y *observable* en este punto de equilibrio.

## 5. DISEÑO CONTROLADORES

Para realizar el control de Swing Up es necesario usar una ley de control No Lineal que acerque el péndulo de su posición de reposo a cercanías de la invertida, en este caso se implementa una estrategia de Modos deslizantes diseñada por Furuta (2003). Para el control de balanceo la mejor opción es

implementar un control basado en retroalimentación de estados; aquí se usa ubicación de polos y un observador de orden mínimo para realizar este control (Ogata (1996)).

### 5.1 Ubicación de Polos Discretos

La técnica básica para el diseño de controladores basados en variables de estado es la ubicación de polos, que utiliza la ley de control dada por la ecuación (12).

$$u(k) = -K_d \cdot x(k) \quad (12)$$

$K_d$  es la matriz de ganancia de realimentación. Dado que el sistema discretizado es controlable, es posible asignar polos al sistema discreto en lazo cerrado ( $A_d - B_d K_d$ ) en cualquier lugar dentro del círculo unitario. Se proponen los polos para el sistema en lazo cerrado dados en la siguiente ecuación (13).

$$Polos_d = [0.97 \ 0.96 \ 0.95 \ 0.94 \ 0.93] \quad (13)$$

La matriz  $K_d$  obtenida para el sistema en lazo cerrado se muestra en la ecuación (14).

$$K_d = [-0.1875 \ 4.2485 \ -0.1775 \ 0.5218 \ -1.4293] \quad (14)$$

Por último debido a que solo se pueden medir  $\theta_1$  y  $\theta_2$ , es necesario implementar un observador para estimar el resto del estado del sistema.

### 5.2 Diseño Observador Orden Mínimo

En la práctica, algunas de las variables de estado pueden medirse con precisión, las cuales no necesitan ser estimadas. Un observador que estime menos de  $n$  variables se conoce como observador de orden mínimo (Ogata (1996)).

El observador de orden mínimo puede diseñarse dividiendo primero el vector de estados ( $x[k]$ ) en dos partes:

$$x(k) = \begin{bmatrix} x_a(k) \\ x_b(k) \end{bmatrix}$$

Donde,  $x_a(k)$  es la porción del vector que puede medirse ( $m$  variables),  $x_b(k)$  es la porción del vector no medible ( $n-m$  variables).

Se procede a realizar la división de las matrices.

$$A_d = \begin{bmatrix} G_{aa} & G_{ab} \\ G_{ba} & G_{bb} \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$B_d = \begin{bmatrix} H_a \\ H_b \end{bmatrix} \quad (16)$$

Para este caso se tiene en total cinco variables de estado ( $n=5$ ), de las cuales dos pueden ser medidas

( $\theta_1$  y  $\theta_2$ ) y derivando estas se obtienen  $\dot{\theta}_1$  y  $\dot{\theta}_2$ , entonces  $m=4$ , quedando sólo por estimar la corriente del motor.

Debido a que el sistema discreto es observable, es posible diseñar el observador. La ecuación característica para el observador de orden mínimo es:

$$|zI - G_{bb} + K_e G_{ab}| = 0 \quad (17)$$

$K_e$  es la matriz de ganancia de realimentación del observador, esta puede determinarse seleccionando la localización de polos en lazo cerrado deseada para el observador. Si se requiere una respuesta con oscilaciones muertas la ecuación característica requerida es:

$$F(z) = z - 0.$$

Para este caso  $K_e = [K_{e1} \ K_{e2} \ K_{e3} \ K_{e4}]$ , reemplazando en la ecuación (17) e igualando con la ecuación deseada se obtiene, al igualar coeficientes, la siguiente ecuación:

$$-G_{55} + G_{15}K_{e1} + G_{25}K_{e2} + G_{35}K_{e3} + G_{45}K_{e4} = 0 \quad (18)$$

Si  $K_{e2} = K_{e3} = K_{e4} = 0$

$$K_{e1} = \frac{G_{55}}{G_{15}} \quad (19)$$

El diagrama de bloques del observador de orden mínimo implementado en Matlab se muestra en la figura (4).

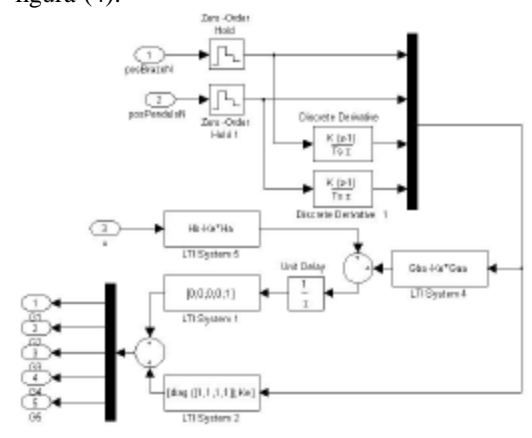


Fig. 4. Diagrama de bloques del observador de orden mínimo.

### 5.3 Control Tipo Modos Deslizantes para Swing Up

Es una técnica de control robusto, la cual permite controlar sistemas no lineales con imprecisiones de modelaje y/o perturbaciones. Se implementa el modo deslizante y la ley de control dada por Furuta (2003) para acercar al péndulo a la posición



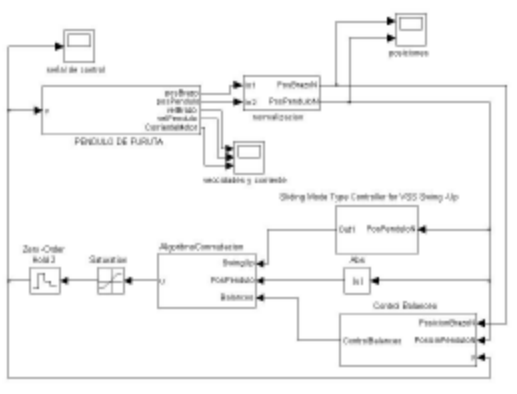


Fig. 8. Diagrama de bloques control de Swing Up y balanceo aplicado al sistema no lineal.

En la fig. 9 se muestra la respuesta de las posiciones del péndulo al control, como se observa en tan sólo 3 seg. ya se tiene al péndulo en la posición invertida, y a los 7 seg. se aplica una perturbación la cual es corregida, en la fig. 10 se entrega la señal de control resultante en este proceso. En las fig. 11 y 12 se muestran los resultados obtenidos aplicando el control al prototipo, como se observa en un poco más de 4 seg. se tiene al péndulo en la posición invertida, y entre los 6 y 7 seg. se encuentra la respuesta ante una perturbación la cual se corrige inmediatamente.

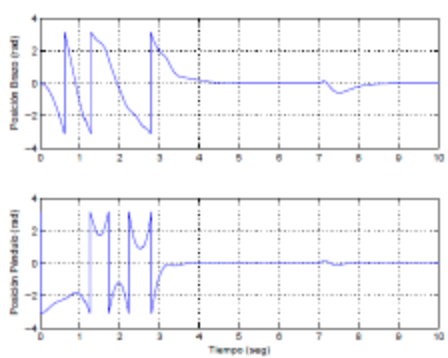


Fig. 9. Simulación control de Swing Up y Balanceo: Posiciones

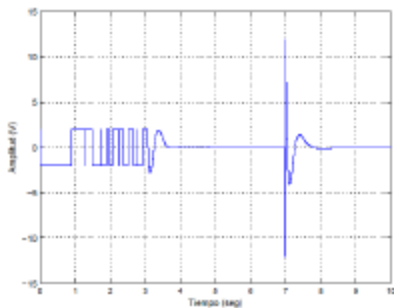


Fig. 10. Simulación control de Swing Up y Balanceo: Señal de control

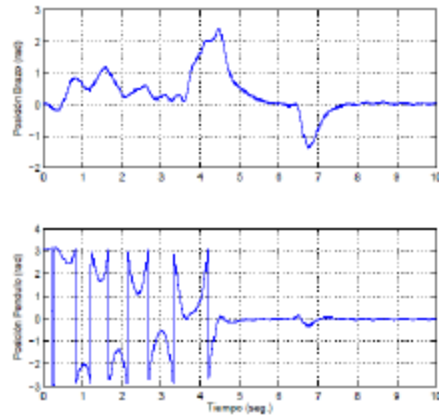


Fig. 11. Control de Swing Up y Balanceo prueba sobre el prototipo: posiciones.

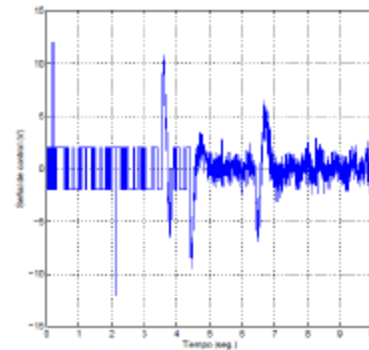


Fig. 12. Control de Swing Up y Balanceo prueba sobre el prototipo: Señal de control.

## 7. CONCLUSIONES

Se usan las posiciones angulares  $\theta_1$  y  $\theta_2$  para estimar el estado del sistema (velocidades angulares y corriente del motor) por medio del observador de orden mínimo; en el prototipo la medición de las posiciones fue sencilla debido al uso de los encoders incrementales y el dsPic, que realiza un acondicionamiento con un bajo nivel de ruido y da la posibilidad de controlar el motor por medio de un modulo especializado.

La implementación del sistema no lineal en Matlab, usando las ecuaciones diferenciales que describen la dinámica del péndulo de Furuta, ofrece una herramienta útil, ya que se logra evaluar la respuesta ante condiciones iniciales y la demostración de las dos leyes de control aplicadas aquí, cuando aun estaba en ejecución la construcción del prototipo.

La similitud entre la respuesta obtenida en simulación con la obtenida con el prototipo juega un papel importante en la validación del modelo no lineal construido en Matlab, el cual corrobora que el uso del modelo matemático puede suplir la falta del sistema físico al momento de implementación de leyes de control diseñadas.

El modelo no lineal cambia drásticamente al agregar al péndulo una masa haciendo que se deba rediseñar las leyes de control a fin de obtener un comportamiento óptimo del sistema.

La inclusión de la quinta variable permite tener la certeza de implementar la señal de control como voltaje al actuador.

## 8. RECONOCIMIENTO

Desarrollado gracias al aporte económico por parte del grupo DSP\_Uptc. Además agradecer a Ben S. Cazzolato y Zebb Prime, por el desarrollo matemático hecho en el modelado.

## REFERENCIAS

- Aracil, J. and Gordillo, F. (2005). "El péndulo invertido: un desafío para el control no lineal". *CEA-IFAC*.
- Awtar, S., King, N., Allen, T., Bang, I., Hagan, M., Skidmore, D., and Craig, K. (2002). "inverted pendulum systems: Rotary and arm-driven - a mechatronic system design case study". *Mechatronics*, 12, 357-370.
- Baba, Y., Izutsu, M., Pan, Y., and Furuta, K. (2006). "Design of control method to rotate pendulum". *Proceedings of SICE-ICASE International Joint Conference*. Korea.
- Cazzolato, B. and Prime, Z. (2008). The dynamics of the furuta pendulum. Technical report, The University of Adelaide.
- Craig, K. and Awatar, S. (2005). "Inverted pendulum systems: rotary and arm-driven a mechatronic system design case study". *Proceedings of the 7th Mechatronics Forum International Conference*. Atlanta.
- Egeland, O. and Gravdahl, T. (2002). "Modeling and Simulation for Automatic Control". Marine Cybernetics, Trondheim, Norway.
- Fantoni, I. and Lozano, R. (2002). "Non-linear control of underactuated mechanical systems". Springer-Verlag, London.
- Furuta, K. (2003). Control of pendulum: From supermechano-system to human adaptive mechatronics. *proceedings of the 42nd IEEE*.
- Furuta, K. and Iwase, M. (2004). "Swing-up time analysis of pendulum". *Bulletin of the Polish Academy of Sciences: Technical Sciences*, 52(3), 153-163.
- Furuta, K., Yamakita, M., and Kobayashi, S. (1992). "Swing-up control of inverted pendulum using pseudo-state feedback". *Journal of Systems and Control Engineering*, 206(6), 263-269.
- Hirata, H., Haga, K., Anabuki, M., Ouchi, S., and Ratiroch-Anant, P. (2006). "Self-tuning control for rotation type inverted pendulum using two kinds of adaptive controllers". *Proceedings of the 2006 IEEE Conference on Robotics, Automation and Mechatronics*, 1-6.
- Iwase, M., Åström, K., Furuta, K., and Åkesson, J. (2006). "Analysis of safe manual control by using furuta pendulum". *Proceedings of the IEEE International Conference on Control Applications*, 568-572.
- Åkesson, J. and Åström, K. (2001). "Safe manual control of the furuta pendulum". In *Proceedings 2001 IEEE International Conference on Control Applications (CCA'01)*, 890-895.
- Ogata, K. (1996). *Sistemas de Control en Tiempo Discreto*. Pearson Education, México, 2 Edition.
- Olfati-Saber, R. (2001). "Nonlinear Control of Underactuated Mechanical Systems with Application to Robotics and Aerospace Vehicles". Phd thesis, Department of Electrical Engineering and Computer Science, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA.
- Ratiroch-Anant, P., Anabuki, M., and Hirata, H. (2004). "Self-tuning control for rotational inverted pendulum by eigenvalue approach". *Proceedings of TENCON 2004, IEEE Region 10 Conference*, D, 542-545.
- Åström, K. and Furuta, K. (2000). "Swinging up a pendulum by energy control". *Automatica*, 36, 287-295.
- Xu, Y., Iwase, M., and Furuta, K. (2001). "Time optimal swing-up control of single pendulum". *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 123(3), 518-527.