

## CONTINUOUS AND DISCRETE CONTROL DESIGN BASED ON LMI

### DISEÑO DE UN CONTROLADOR CONTINUO Y DISCRETO BASADO EN LMI

MSc. Oscar Ivan Higuera Martínez. PhD. Juan Mauricio Salamanca

Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia  
Grupo de Investigación en Procesamiento de Señales DSP-UPTC.  
Escuela de Ingeniería Electrónica, Sogamoso, Boyacá, Tel.: (578) 7705450, Ext. 140.  
E-mail: {oscar.higuera, Juan.salamanca}@uptc.edu.co

**Abstract:** This paper presents the design of continuous H<sub>∞</sub> robust control and digital redesign, in order to achieve the same system (continuous and discrete), the two controllers designed based on linear matrix inequalities. Subsequently their performance is illustrated with two linear examples, which makes the comparison and analysis of their behavior.

**Keywords:** Discrete Control, LMI, stabilization, sample time, robustness.

**Resumen:** Este documento presenta el diseño de un controlador robusto H<sub>∞</sub> continuo y su rediseño digital, con el objetivo de obtener la misma respuesta tanto del sistema continuo como del sistema discreto, los dos controladores diseñados se basan en las desigualdades matriciales lineales. Posteriormente se ilustra su desempeño con dos ejemplos lineales, donde se realiza la comparación y análisis de su comportamiento.

**Palabras clave:** Control discreto, LMI, estabilización, tiempo de muestreo, robustez.

## 1. INTRODUCCIÓN

Los sistemas de control continuo y discreto presentan diferencias considerables desde el punto de vista de implementación, de comportamiento y de análisis de estabilidad, es así que para lograr que un sistema de control continuo presente el mismo comportamiento de uno discreto, es necesario que los dos sistemas se ajusten para las mismas entradas y condiciones iniciales (Królikowski, 2009), una aproximación de este que permite realizar el diseño del sistema de control discreto es denominado rediseño digital, consiste primero en realizar el diseño del sistema de control análogo que cumpla unos requerimientos específicos, y entonces convertirlo a un controlador digital equivalente, manteniendo las propiedades del sistema original, ejemplo de esta técnica están en (Chang, 2002).

Otro punto de vista de este problema de diseño de sistemas de control discreto es diseñarlo de forma que cumpla las características similares de un sistema de control de forma análogo, pero partiendo del sistema discretizado, y así obtener un controlador adecuado que cumpla algunas características, ejemplo de este es (Bonidal, 2009), así mismo se consideran sistemas con retardos como (Lombardi, 2010, Boukas, 2006, Gao, 2007).

Para diseñar los sistemas de control se pueden emplear las desigualdades matriciales lineales (LMI), El Diseño de controladores LMI están basados en los modelos lineales del sistema y se basan en el problema de optimización para lograr una solución al problema planteado, logrando así la estabilidad y robustez del sistema. Esta técnica fue introducida en (Boyd 1994), y ha sido empleada

para el diseño de sistemas de control de forma continua (Kebede, 2006; Higuera, 2007; Higuera, 2008; Banjedpongchay, 1997) así también de forma discreta (Chang, 2002; Krolkowski, 2009).

## 2. DISEÑO DEL CONTROLADOR LMI CONTINUO

Para el diseño del controlador Robusto H8 basado en técnicas LMI se tiene en cuenta el modelo general dado en (1), el cual corresponde al modelo de la planta P(s) del sistema realimentado presente en la Figura 1.

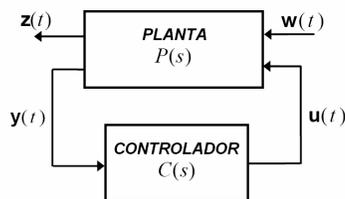


Fig. 2. Interconexión por realimentación de la planta y el controlador.

$$\begin{aligned} \dot{X}(t) &= AX(t) + B_1 w(t) + B_2 u(t) \\ Z &= C_1 X(t) + D_{11} w(t) + D_{12} u(t) \\ Y &= C_2 X(t) + D_{21} w(t) + D_{22} u(t) \end{aligned} \quad (1)$$

El diseño del controlador LMI está basado en (1), considerando la señal de control como (2), obteniendo el sistema realimentado presente (3).

$$u(t) = -KX(t) \quad (2)$$

$$Z(t) = [Clc(SI - Alc)^{-1} B_1 + D_{11}] X(t) \quad (3)$$

Se desea diseñar un controlador por realimentación de estados Robusto H8 usando técnica LMI, por lo tanto el problema radica en encontrar la matriz de realimentación de estados óptima H8,  $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , tal que  $\|FL(P(s), K)\|_8$  sea mínima, obteniéndose el lema (Kebede, 2006):

**Lema 1.** El problema de estabilidad de la síntesis del control óptimo H8 ( $K = LQ^{-1}$ ) por realimentación, consiste en minimizar  $\gamma \in \mathbb{R}$  con  $Q > 0$ , tal que la siguiente LMI sea factible.

$$\begin{bmatrix} AQ + QA^T - (B_2 L + L^T B_2^T) & B_1 & (C_1 Q - D_{12} L)^T \\ B_1 & -\gamma I & D_{11}^T \\ C_1 Q - D_{12} L & D_{11} & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (4)$$

La optimización de este problema para lograr el mínimo valor de  $\gamma$  se realiza empleando el *Toolbox* de LMIs de Matlab, donde se introduce la estructura de la LMI y los valores de las matrices conocidas (Gahinet). En (Higuera, 2007), se presenta un algoritmo de solución de esta LMI empleando Optimización del valor de  $\gamma$  utilizando Algoritmos genéticos.

## 3. DISEÑO DEL CONTROLADOR LMI DISCRETO

Para poder diseñar un controlador discreto que cumpla unos requerimientos similares al sistema continuo, se emplean las mismas matrices A y B<sub>2</sub> descritas en la parte continua, y se emplea la transformación bilineal (método de Tustin) como se plantea en (Zhang, 2004) para discretizar el sistema lineal.

El modelo discreto del sistema en lazo cerrado en (K+1)T esta dado por (Królikowski, 2009):

$$X_d(\overline{K+1T}) = (G - HK_d) X_d(KT) + HE_d R \quad (5)$$

$$Y_d(KT) = CX_d(KT)$$

Donde:

$$G = \left( I - \frac{T}{2} A \right)^{-1} \left( I + \frac{T}{2} A \right) \quad (6)$$

$$H = \frac{T}{2} \left( I - \frac{T}{2} A \right)^{-1} B_2$$

$E_d$  es la ganancia de feedforward discreta

$R$  es el Vector de referencia

Y la señal de control estaba dada por:

$$u_d(KT) = -K_d X_d(KT) + E_d R \quad (7)$$

Entonces el objetivo de diseñar un controlador discreto radica en solucionar la siguiente LMI (Chang, 2002):

**Teorema:** Si existe una matriz simétrica definida positiva G, una matriz F, y un escalar  $a > 0$ , tal que el siguiente problema generalizado de valores propios (GEVP) (Boyd, 1994) se puede solucionar, entonces la ley de control digital (7) con  $E_d = 0$  satisface el objetivo formulado de estabilizar el sistema si la siguiente LMI es factible

$$\min_{\Gamma, F} a \text{ s.t.} \quad (8)$$

$$\begin{bmatrix} -a\Gamma & * \\ G_c\Gamma - G\Gamma + HF & -aI \end{bmatrix} < 0$$

$$\begin{bmatrix} -\Gamma & * \\ G\Gamma + HF & -I \end{bmatrix} < 0$$

Donde  $F=K_dG$  y  $*$  denota el elemento transpuesto en la posición simétrica, la matriz de ganancia de realimentación  $K_d$  está dada por:

$$K_d = F\Gamma^{-1} \quad (9)$$

Para la transformación bilineal, la matriz  $E_d$  puede obtenerse igualando la respuesta (salida) en estado estable del sistema continuo, con la respuesta del sistema discreto, obteniendo:

$$E_d = [C_c(I - (G - HK_d))^{-1}H + D_c]^+ \quad (10)$$

$$[C_c(I - G_c)^{-1}H_c + D_c]E_c$$

Donde  $E_c$  es la ganancia de *feedforward* continua, y  $^+$  denota la pseudo-inversa de Moore - Penrose.

#### 4. EJEMPLOS Y RESULTADOS

Los controladores se probaran sobre dos ejemplos de sistemas lineales, el primero de ellos es el ejemplo presentado en (Królikowski, 2009) y el segundo es el presentado en (Higuera, 2007).

##### 3.1. Ejemplo 1

Tomando el ejemplo de (Królikowski, 2009), el sistema lineal esta dado por:

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -17.15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -53.9 & 0 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} U \quad (11)$$

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} U$$

Para el diseño del controlador continuo por medio del *Toolbox* de LMIs de Matlab, se empleo la ecuación (4) con  $\gamma=0.35$ , obteniendo:

$$K_c = [3.0200 \quad 1.4668 \quad -17.1398 \quad -3.4431] \quad (12)$$

Posteriormente se realiza el rediseño digital para obtener el controlador, para lo cual se emplea la ecuación (8), donde se utiliza  $a=0.35$ , se selecciona el tiempo de muestreo es de 5 mseg obteniendo:

$$K_d = [7.8155 \quad 12.0163 \quad -41.2950 \quad -15.6362] \quad (13)$$

La respuesta de los dos controladores se puede observa en la figura 3. Allí observamos la señal de control, los estados  $x_2$  y  $x_3$ , viendo que su respuesta tiende a establecer el sistema en el mismo tiempo.

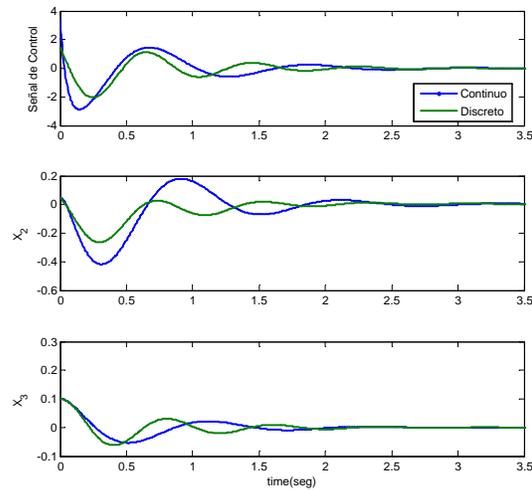


Fig. 3. Respuesta a los controladores propuestos en el ejemplo 1.

##### 3.2. Ejemplo 2

Tomando el ejemplo de (Higuera, 2007), el cual corresponde al modelo lineal de un sistema de helicóptero con dos grados de libertad, dado por:

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -9.2751 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3.4955 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 2.3667 & 0.0790 \\ 0.2410 & 0.7013 \end{bmatrix} U \quad (14)$$

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U$$

Para el diseño del controlador continuo se empleo la ecuación (4) con  $\gamma=0.37$ , obteniendo:

$$K_c = \begin{bmatrix} 264.6983 & 21.7836 & 21.3092 & 1.7475 \\ -41.2847 & 5.1074 & -3.4622 & 2.4247 \end{bmatrix} \quad (15)$$

Posteriormente se realiza el rediseño digital para obtener el controlador, para lo cual se emplea la ecuación (8), donde se utiliza  $a=0.17$ , se selecciona el tiempo de muestreo es de 5 mseg obteniendo:

$$K_d = \begin{bmatrix} 465.5549 & 38.2843 & 38.4098 & 2.9442 \\ -72.5549 & 9.0652 & -6.4953 & 8.9956 \end{bmatrix} \quad (16)$$

La respuesta de los dos controladores (continuo y discreto) se puede observa en la figura 4. Allí se observa la segunda señal de entrada al sistema o entrada de control, y el estado  $x_2$ , viendo que su respuesta tiende a establecer el sistema en un tiempo similar.

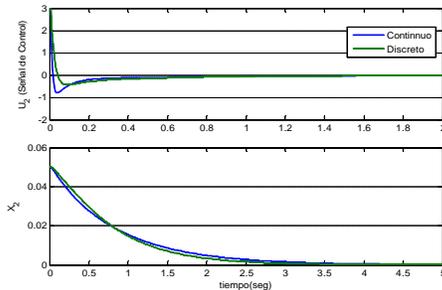


Fig. 4. Respuesta a los controladores propuestos en el ejemplo 2.

Como se observa en las figuras 3 y 4 los sistemas de control diseñados, comparando el sistema continuo y el sistema discreto se detalla que se presenta un error en el transiente, pero se estabilizan en aproximadamente el mismo tiempo. En la figura 5 se presenta las respuestas del cambio del tiempo de muestreo, se realizar el diseño del controlador discreto con diferentes tiempos de muestreo (5mseg, 20 mseg y 30 mseg), utilizando siempre la ecuación (8) para obtener el controlador para cada tiempo de muestreo. En figura 5 podemos detallar que el comportamiento es similar y lo que cambia sencillamente son los pasos debidos al muestreo, mostrando la característica del rediseño digital. Es de aclarar que se debe realizar el análisis del tiempo de muestreo adecuado para evitar la inestabilidad del sistema controlado.

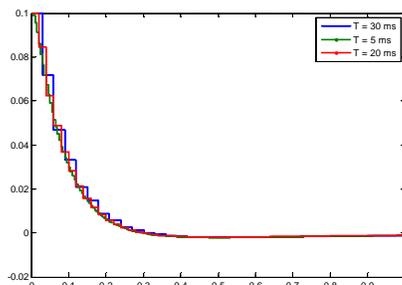


Fig. 5. Respuesta de la variable  $X_1$  a diseño con diferentes tiempos de muestreo.

## 5. CONCLUSIONES

La técnica de rediseño digital es un método útil para poder obtener una dinámica deseada, partiendo de una dinámica conocida del sistema en tiempo continuo, y por tanto se puede obtener una respuesta similar tanto en tiempo continuo como tiempo discreto, sin importar el tiempo de muestreo. Pero se debe tener en cuenta las características del tiempo de muestreo por cuanto este puede producir inestabilidad de los sistemas controlados. En esta técnica se puede obtener que

un sistema discreto posea la misma respuesta de un sistema continuo, por lo cual es importante realizar un buen diseño del sistema de control continuo y evaluar cual es la respuesta adecuada, esto permitiría realizar la implementación en procesadores digitales, proveyendo una respuesta del sistema como si fuese un sistema continuo.

## REFERENCIAS

- Banjerdpongchai D. (1997). *Parametric robust controller synthesis using linear matrix inequalities*. Philosophy Doctor Thesis. Stanford University.
- Bonidal R, Mallocci I, Daafouz J. (2009). *A LMI solution to the LQ Problem for Discrete Time Singularly Perturbed Systems*. Proceedings of the European Control Conference. Budapest.
- Boukas, E.K.; (2006) *Manufacturing systems: LMI approach*, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol: 51 Issue:6, 1014 - 1018
- Boyd S, El Ghaoui L, Feron E, Balakrishnan V. (1994). *Linear matrix Inequalities in system and control theory, 3rd Ed.* Society for Industrial and Applied Mathematics, USA.
- Chang W, Park JB, Lee HJ, Joo YH. (2002). *LMI approach to digital redesign of linear time-invariant systems*, IEE Proc. Contr. Theory Appl., Estrategias; 149,4:297-302.
- El Ghaoui L, Niculescu S.I. (1999). *Advances in Linear Matrix Inequality methods in Control*. Society for Industrial and Applied Mathematics, USA.
- Kebede G (2006) *Robust Decentralized control of power systems: A Matrix Inequalities approach*. Universität Duisburg-Essen. Tesis Doktors der Ingenieurwissenschaften.
- Królikowski A, Horla D, (2009) *Design of digital Control Systems via LMI*. Proceedings of the European Control Conference. Budapest.
- Higuera O, Salamanca J, Díaz H. (2007). *Diseño de un Controlador LMI+I Basado en Optimización para un Helicóptero de dos Grados de Libertad* Ingeniería, Investigación y Desarrollo. Vol. (No.): 5(2); 22-28.
- Higuera O, Salamanca J, Rodríguez O, Ramírez J. (2008). *Control Robusto H8 Basado en desigualdades Matriciales Lineales Aplicado a un sistema de Potencia Modelado como un sistema algebraico diferencial*. XIII Congreso Latinoamericano de Control Automático. Venezuela.
- Zhang, G, Chen T. (2004). *Comparing digital implementation via the bilinear and step-invariant transformations*, Automatica; 40: 327 -330.