SOLUTION OF THE NONLINEAR SCHRÖDINGER EQUATION FOR RADIO OVER FIBER SYSTEMS USING THE SPLIT-STEP FOURIER METHOD

SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN NO LINEAL DE SCHRÖDINGER PARA SISTEMAS DE RADIO SOBRE FIBRA A TRAVÉS DEL MÉTODO SPLIT-STEP DE FOURIER

Est. Cristian D. Calderón Villamizar, Est. Narly D. Basto Moreno, MSc. Karla C. Puerto Lopez, PhD. Dinael Guevara Ibarra.

Universidad Francisco de Paula Santander, Facultad de Ingeniería.
Grupo de investigación y desarrollo en Electrónica y Telecomunicaciones (GIDET).
Av. Gran Colombia No. 12E-96, San José de Cúcuta, Norte de Santander, Colombia.
E-mail: (cristiandavidcv, narlydanneybm, karlaceciliapl, dinaelgi) @ufps.edu.co.

Abstract: This article presents the modeling of the nonlinear Schrödinger equation (NLSE), using the numerical Fourier Split-Step method, which is an algorithm that provides an exact solution to this equation and describes the behavior of transmitted pulses in an optical channel. For the development of this research, the obtained results from the Matlab computational tool were analyzed, in order to detail the effect of the parameters of linearity and non-linearity on the propagation of the transmitted pulse. The results indicate that the incidence of linear and non-linear effects depends directly on the transmission speed and the input power, which are responsible for causing dispersion and non-linear phenomena such as self-phase modulation, cross phase modulation and fourth wave mix.

Keywords: Nonlinear Schrodinger equation (NLSE), nonlinear effects, Split-Step Fourier.

Resumen: En este artículo se presenta el modelado de la ecuación no lineal de Schrödinger (NLSE), teniendo en cuenta el método numérico Split-Step de Fourier, el cual es un algoritmo que brinda una solución exacta de esta ecuación y permite describir el comportamiento de los pulsos transmitidos en un canal óptico. Para el desarrollo de esta investigación se realizó, además, un análisis de los resultados obtenidos a partir de la herramienta computacional Matlab, con el fin de detallar el efecto de los parámetros de linealidad y no linealidad sobre la propagación del pulso transmitido. En los resultados se observa que la incidencia de los fenómenos lineales y no lineales depende directamente de la velocidad de transmisión y de la potencia de entrada, los cuales son responsable de causar la dispersión y los fenómenos no lineales como auto-modulación de fase, modulación de fase cruzada y mezcla de cuarta onda.

Palabras clave: Ecuación no lineal de Schrödinger (NLSE), fenómenos no lineales, Split-Step Fourier,.

1. INTRODUCION

Las comunicaciones por fibra óptica permiten la transmisión de datos a grandes velocidades, bajos niveles de atenuación y gran confiabilidad. Su uso se extiende desde enlaces de larga distancia hasta conexiones en el hogar mediante la red de acceso a servicios (Fernández y González, 2015).

En las comunicaciones por fibra óptica, el comportamiento de las señales es lineal cuando se opera a bajos niveles de potencia de transmisión de pocos miliwatios (mW) y velocidades menores a 2,5Gbps (Ramaswami y Sivarajan, 2010).

A velocidades más altas se comienzan a presentar fenómenos no lineales como la auto-modulación de fase SPM, modulación de fase cruzada XPM y la mezcla de cuarta onda FWM. El comportamiento de estos efectos no lineales en la fibra está definido mediante la ecuación no lineal generalizada de Schrödinger (NLSE), la cual describe la propagación de la luz en una fibra no lineal dispersiva, con atenuación y explica el comportamiento de los pulsos de luz en el canal óptico (Gómez *et al*, 2015). Sin embargo, la presencia de los factores de dispersión y no linealidad de la fibra hacen que esta ecuación

resulte compleja para resolver de forma analítica, recurriendo a otros métodos y algoritmos numéricos que permitan llegar a su solución de forma concisa y detallada.

Este documento, muestra el estudio detallado de la solución de la ecuación NLSE, la cual permite conocer el comportamiento de una señal portadora transmitida por el canal óptico y así evaluar el comportamiento de la señal mediante pruebas de variación de parámetros como distancia y potencia. Inicialmente se realizó el modelado de la ecuación no lineal de Schrödinger, explicando de forma detallada su solución, a partir del método numérico Split Step de Fourier y observando su relación con el método analítico. Seguidamente, se realizó la implementación de un software encargado de simular la ecuación y el comportamiento de una señal óptica mediante las respectivas configuraciones de las variables empleando la herramienta computacional Matlab.

Entre los resultados obtenidos, se muestra la simulación de la ecuación para distintos valores de entrada en la fibra, observando que la incidencia de los fenómenos lineales y no lineales depende directamente de los parámetros de velocidad de transmisión y potencia de entrada, los cuales se presentan en forma de dispersión y SPM respectivamente. Se evidenció, además, el método de compensación de SPM a partir del balance en la frecuencia generado por la dispersión por velocidad de grupo.

2. SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN NO LINEAL DE SCHRODINGER

En un sistema de comunicaciones óptico, los pulsos de información enviados corresponden a señales de luz. Como todas las ondas electromagnéticas, estas señales son descritas mediante las ecuaciones de electromagnetismo de Maxwell (1-4) (Peralta *et al*, 2014).

$$\nabla . \boldsymbol{H} = \mathbf{0} \quad (1)$$

$$\nabla . \boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\mu}\frac{\boldsymbol{\partial H}}{\boldsymbol{\partial t}} \quad (2)$$

$$\nabla . \boldsymbol{E} = \mathbf{0} \quad (3)$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \frac{\boldsymbol{\partial D}}{\boldsymbol{\partial t}} \quad (4)$$

Donde μ es la permeabilidad magnética y de la fibra óptica respectivamente y *D* es el vector desplazamiento eléctrico. Resolviendo estas ecuaciones se obtiene la ecuación (5), con la variable *c* igual a la velocidad de la luz.

$$\nabla^2 E = -\frac{\epsilon}{c^2}\frac{\partial^2 (E)}{\partial t^2} \quad (5)$$

Aplicando la transformada de Fourier a esta ecuación se obtiene la ecuación en el dominio de la frecuencia que se observa en la ecuación (6).

$$\nabla^2 E(z,w) + \frac{{w_0}^2\,\epsilon(w)}{c^2}(E\ (\mathrm{z},\mathrm{w})) = 0 \quad (6)$$

Aplicando el método de separación de variables, se puede encontrar la solución a la envolvente del campo en el dominio de la frecuencia E(z,w). Además de esto se debe tener en cuenta que la constante de propagación β ya no corresponde a un parámetro lineal, sino que es función también de una componente no lineal que depende de la frecuencia.

De esta forma se puede obtener la NLSE, mostrada en la ecuación (7), teniendo en cuenta los coeficientes de dispersión de segundo y tercer orden (resultantes de la dependencia con la frecuencia) y considerando la atenuación y el término cuadrático el cual es el responsable del efecto Kerr:

$$\frac{\partial E}{\partial z} = -\frac{\alpha E}{2} - \frac{j\beta_2}{2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + \frac{\beta_3}{6}\frac{\partial^3 E}{\partial t^3} + j\gamma|E|^2 E \quad (7)$$

Es posible efectuar la solución de la NLSE mostrada en (7) de dos maneras: mediante el método analítico o aproximado y a partir de métodos numéricos. (Peralta *et al*, 2014).

2.1 MÉTODO ANALÍTICO O APROXIMADO

Para la solución aproximada o analítica de la NLSE, es posible efectuar el modelado de la ecuación observando las contribuciones que aportan los términos lineales y no lineales de la ecuación, obteniendo de esta forma dos soluciones independientes: una de origen lineal, dependiente de la dispersión cromática y otra de origen no lineal, dependiente del efecto Kerr.

Para realizar la solución de la ecuación teniendo en cuenta únicamente sus contribuciones lineales, se deben suprimir los factores no lineales de la NLSE, donde se obtuvo la ecuación mostrada en (8).

$$\frac{\partial E}{\partial z} = -\frac{\alpha}{2}E - \frac{j}{2}\beta_2\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + \frac{\beta_3}{6}\frac{\partial^3 E}{\partial t^3} \quad (8)$$

La solución de esta ecuación se puede observar en la fórmula mostrada en (9), donde el campo eléctrico total es función de los términos de dispersión y atenuación presentes en la fibra. Se puede observar que el campo eléctrico a lo largo del espacio es función de la componente E(0,t) la cual representa la envolvente inicial del campo eléctrico y corresponde la señal de información.

$$E(z,t) = E(0,t)e^{j\left(\frac{\beta_2}{2}w^2 - \frac{\beta_3}{6}w^3 + \frac{\alpha}{2}\right)z} \quad (9)$$

Para realizar la solución de la ecuación teniendo en cuenta los factores no lineales de la NLSE, se deben suprimir los términos lineales de la ecuación, obteniendo la ecuación mostrada en (10).

$$\frac{\partial E}{\partial z} = -\frac{\alpha}{2}E + j\gamma|E|^2E \quad (10)$$

La solución se puede observar en la ecuación (11), donde se observa que el campo eléctrico total es función del campo elevado al cuadrado, esto corresponde al efecto Kerr, responsable de causar los errores no lineales SPM, XPM y FWM. Además, este término es dependiente del valor de longitud efectiva *Leff*, el cual corresponde a la distancia en la fibra a la cual comienzan a tomar importancia los efectos no lineales.

$$E(z,t) = e^{-\left(\frac{\alpha}{2}\right)z} * e^{j\gamma|E(z,t)|^2 Leff} \quad (11)$$

2.2. MÉTODO EXACTO A PARTIR DEL MÉTODO SPLIT-STEP SIMÉTRICO DE FOURIER

Uno de los métodos actuales más utilizados para la solución de ecuaciones diferenciales no lineales es el Método Split Step simétrico de Fourier, mediante el cual se puede obtener la solución de la ecuación separando las componentes lineales L y no lineales N de la ecuación, y aplicando la transformada de Fourier en un tramo Δz de la fibra, creando un algoritmo que permite encontrar la envolvente del campo bajo las contribuciones lineal y no lineal que afectan las señales transmitidas en la fibra (Soriano, 2014). Una buena representación gráfica de este método puede observarse en la figura 1, donde a partir de un tramo Δz se hallan las contribuciones de la parte lineal y no lineal de la ecuación no lineal de Schrödinger.

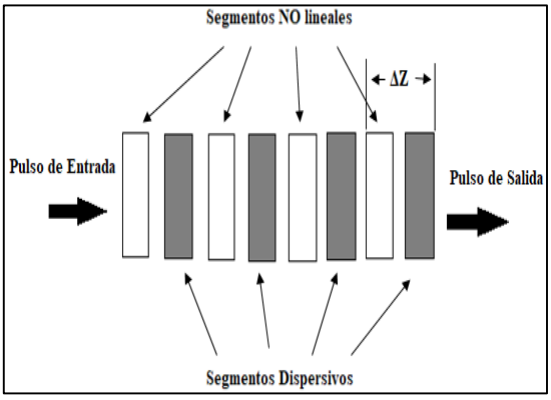


Figura1. Ilustración esquemática método Split Step Fourier. (Amagua y Mogro, 2013)

Aplicando las contribuciones lineal y no lineal, la ecuación (7) queda transformada de la forma mostrada en la ecuación (12)

$$\frac{\partial E(z,t)}{\partial z} = (L+N) * E(z,t) \quad (12)$$

La solución de esta ecuación aplicando el tramo de longitud Δz se muestra en la ecuación (13), donde se puede observar la conformación de un algoritmo dependiente de los términos D y N, los cuales representan las contribuciones lineal y no lineal presentes en la transmisión por la fibra.

$$\frac{\partial E(z+\Delta z,t)}{\partial z} = e^{\frac{\Delta z}{2}L} e^{\int_z^{z+\Delta z}\left(N(Z')\right)dz'} E(z,t) \quad (13)$$

Esta ecuación presenta un algoritmo que permite modelar la propagación a lo largo de la fibra, Los operadores D y N corresponden a:

$$D = j\left(\frac{\beta_2}{2}w^2 - \frac{\beta_3}{6}w^3\right) \quad (14)$$

$$N = j\gamma|E|^2 \quad (15)$$

La razón de la elección de este método es que las transformadas de Fourier de este algoritmo pueden ser resueltas relativamente rápido en comparación con otros métodos de solución de ecuaciones diferenciales.

3. METODOLOGÍA

Para realizar la simulación de la solución de la ecuación no lineal de Schrödinger para un sistema de radio sobre fibra óptica, se diseñó la interfaz gráfica mostrada en la figura 2 a partir de la herramienta Guide de Matlab.

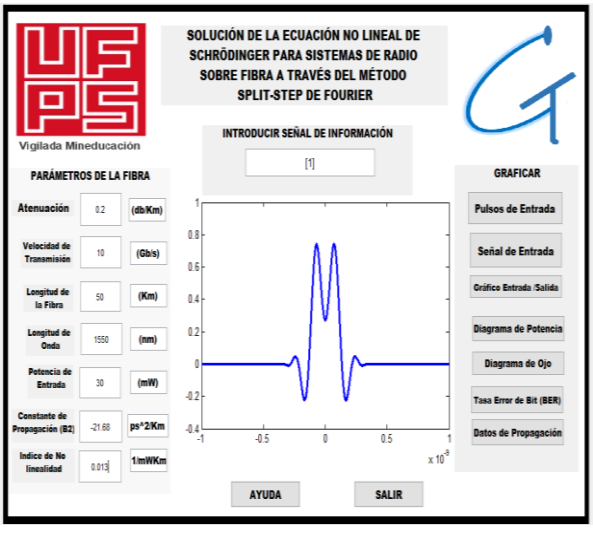


Figura 2. Interfaz gráfica creada en el software Matlab. Fuente: Elaboración propia. Guide de Matlab.

En esta interfaz se introducen los datos de la señal de entrada y parámetros de la fibra, los cuales se tuvieron en cuenta para obtener la señal de salida y las características de propagación del pulso. La propagación de las señales en el canal óptico fue modelada mediante el método Split-Step Fourier. Mediante el programa se busca realizar el modelado de la ecuación, y mediante su interfaz gráfica se realiza el ingreso de los siguientes parámetros de la fibra:

- Atenuación (α).
- Velocidad de trasmisión (R)
- Potencia de la señal (Pint)
- Índice de no linealidad (n2)
- Longitud del enlace de la fibra.
- Constante de propagación (β_2).
- Introducir señal de información (la cual debe ser introducida mediante una señal de pulsos digitales).

El software permite observar el comportamiento a lo largo de la propagación en el enlace de fibra por medio de las siguientes representaciones gráficas:

- Señal de pulsos de entrada.
- Señal de entrada/salida en amplitud.
- Potencia versus tiempo.
- Tasa de error de Bits (BER).

4. PROCEDIMIENTO EXPERIMENTAL

Para realizar la simulación de la señal de entrada, se conformó un tren de pulsos gaussianos definidos por la ecuación (16), a partir de una señal de pulsos digitales (Fu *et al*, 2004).

$$A(T) = \sum_{K=1}^{N} a_k B(T - kTb) \qquad (16)$$

Donde *Tb* es la velocidad de transmisión de cada pulso y B es la función del pulso gaussiano. El valor de a_k corresponde a la señal de pulsos digitales. En la figura 3 se puede observar la forma de la envolvente de una serie de pulsos gaussianos conformados a partir de una secuencia de bits binarios.

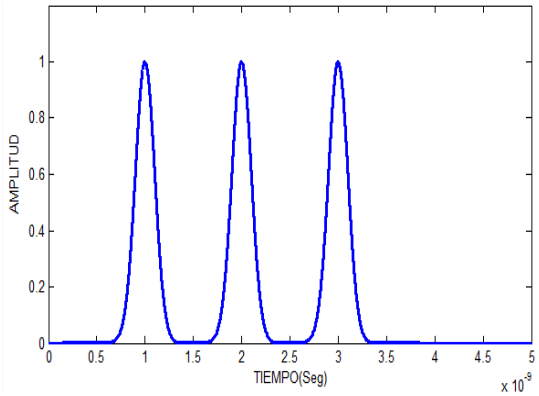


Figura 3. Serie de pulsos gaussianos.
Fuente: Elaboración propia.

Para los pulsos de entrada, se tuvo en cuenta el modelado de un pulso gaussiano, los cuales son muy utilizados en el estudio de estos fenómenos y en las comunicaciones digitales. Sin embargo, también se encuentra disponible la opción de observar el comportamiento de un pulso secante o solitónico, los cuales a pesar de que presentan menor cantidad de pérdidas son mucho más complejos de modelar.

Para el modelado del canal óptico y de la señal de entrada, se introdujeron los parámetros iniciales observados en la Tabla 1.

TABLA I. Parámetros de Simulación a introducir en la interfaz gráfica del software.

Parámetro	Valor
Longitud de onda (λ)	1550 nm
Coeficiente de dispersión	-21.68 (ps^2*Km)
Coeficiente de atenuación	0.22dB/Km
Potencia de la señal	2mW- 20mW
Índice de no linealidad	0.0013 W^{-1}/Km
Velocidad de transmisión	1-2.5-100 Gbps

Para efectuar el la evaluación y análisis de la ecuación, se observó la propagación de un único pulso gaussiano, con el fin de observar el comportamiento de la señal en mejor escala. La señal de entrada conformada a partir de un pulso gaussiano se puede observar en la figura 4.

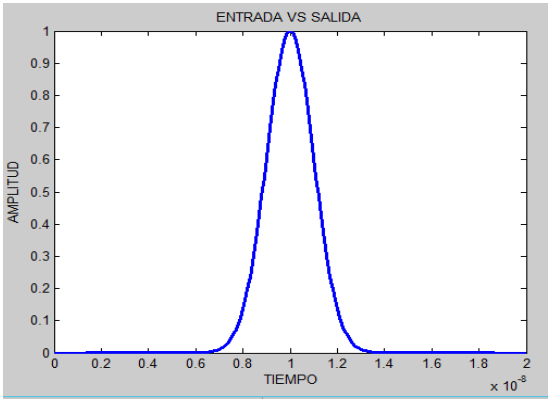


Figura 4. Pulso gaussiano de entrada.
Fuente: Elaboración propia.

5. RESULTADOS

En esta sección se presentan los resultados obtenidos en la investigación y corresponden a la simulación y evaluación de la ecuación no lineal de Schrödinger, para el cual se tuvo en cuenta un enlace de fibra de 50km y se modificaron las velocidades de transmisión y la potencia de entrada con el fin de observar los cambios que se presentaban en la propagación de las señales.

5.1. Análisis para bajas potencias y velocidades de transmisión bajas.

En este caso se tuvieron en cuenta velocidades de transmisión de 1Gbps, 10Gbps, y potencia de entrada de 2mW. Como se puede observar en la figura 5, el cambio que existe en la señal de salida es casi imperceptible, esto es debido a que a bajos valores de potencia y de transmisión, la fibra óptica se comporta como un medio normal y transporta el pulso de luz a la salida sin ninguna modificación significativa.

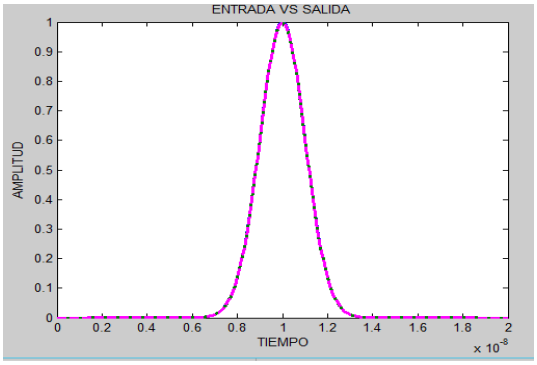


Figura 5. Señal digital a la salida para una potencia de 2 mW y R= 1 Y 10 Gbps.
Fuente: Elaboración Propia.

5.2. Análisis para bajas potencias y velocidades de transmisión altas.

En este caso se tuvieron en cuenta velocidades de transmisión de 40 y 100 Gbps, y potencia de entrada de 2mW. Como se puede observar en la figura 6, el pulso de salida se va ensanchando conforme se va aumentando la velocidad de transmisión. Este fenómeno se produce debido a que la velocidad de transmisión produce la Dispersión por Velocidad de Grupo (GVD), la cual es la encargada de modelar el efecto lineal de la dispersión, esto quiere decir que en la figura 6 se presenta la propagación de las señales únicamente bajo efectos lineales.

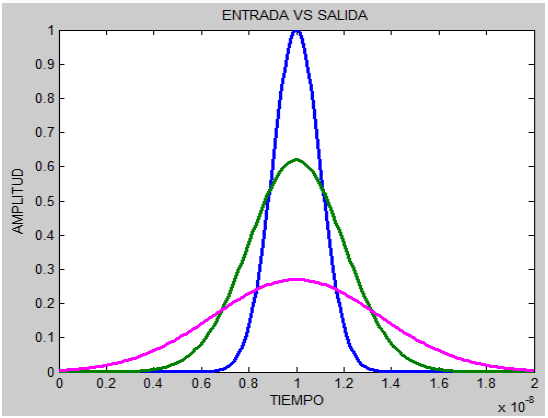


Figura 6. Señal digital a la salida para una potencia de 2 mW y R= 40 Y 100 Gbps.
Fuente: Elaboración Propia.

Se observó que existe un ensanchamiento del pulso, sin embargo, no existen alteraciones en su forma, este sigue siendo un pulso gaussiano.

5.3. Análisis para altas potencias y velocidades de transmisión bajas

En este caso se tuvieron en cuenta velocidades de transmisión de 1Gbps, 10Gbps, y potencia de entrada de 20mW. Como se puede observar en la figura 7, existe un cambio en la fase del pulso gaussiano, el cual pierde su forma y empieza a cambiar su espectro de frecuencia, pero el pulso no cambia su posición en el tiempo, esto refleja que a medida que la potencia de entrada aumenta, los efectos no lineales comienzan a ser más significativos, esta es la principal característica de la auto modulación de fase SPM.
Comparando estos resultados se puede observar la diferencia en la propagación de una señal bajo efectos lineales y bajo efectos no lineales. En el análisis lineal hay un ensanchamiento del pulso el cual cambia de posición en el tiempo, pero no pierde su forma. Sin embargo, en el análisis no lineal ocurre exactamente lo contrario, el pulso pierde su forma, pero mantiene su posición en el tiempo.

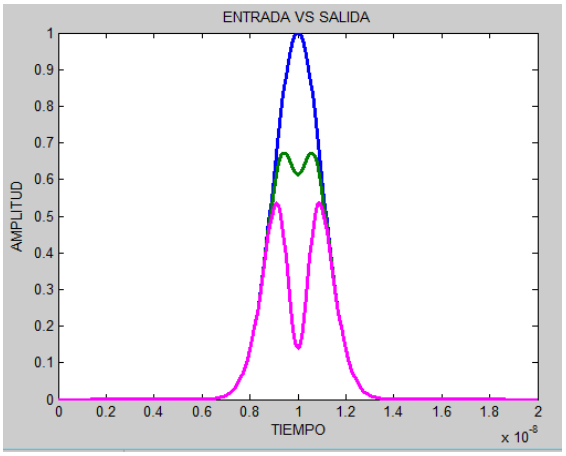


Figura 7. Señal digital a la salida para una potencia de 20 mW y R= 1 Y 10 Gbps.
Fuente: Elaboración Propia.

5.4. Análisis para altas potencias y velocidades de transmisión altas.

Para este caso se tuvieron en cuenta velocidades de transmisión de 40Gbps, 100Gbps, y potencia de entrada de 20mW. Como se puede observar en la figura 8, a 40Gbps, la señal presenta un ensanchamiento lo que evidencia un comportamiento lineal, sin embargo, a 100Gbps, la señal presenta una deformación, mostrando que para este caso las no linealidades tienen mayor importancia. Esto quiere decir que, dependiendo de los valores asignados, predomina más sobre la señal un efecto que otro.

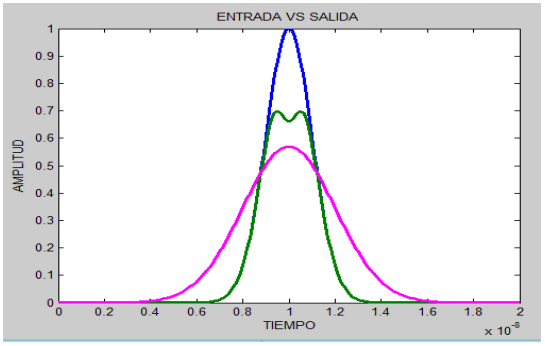


Figura 8. Señal digital a la salida para una potencia de 20 mW y R= 40 Y 100 Gbps.
Fuente: Elaboración Propia.

Sin embargo, a velocidades de transmisión entre 60 y 70 Gbps, no se observó superioridad de ninguno de los efectos. Como se muestra en la figura 9, la señal de salida se mantuvo aproximadamente en su mismo valor de entrada. Este comportamiento es debido a que existe un balance entre los dos fenómenos y la dispersión de grupo (GVD) tiene el ángulo de fase necesario para contrarrestar el efecto de la SPM, el cual es la base de la compensación en la propagación por solitones. (Agrawal,1995)

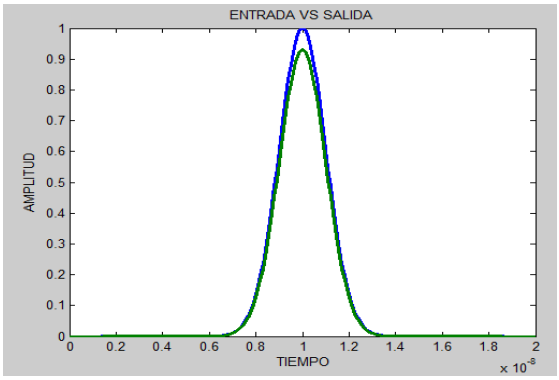


Figura 9. Señal digital a la salida para una potencia de 20 mW y R= 60 Gbps.
Fuente: Elaboración Propia.

5.5. Análisis de la transmisión con pulsos gaussianos y pulsos con solitones.

Para el análisis de la transmisión en el enlace de fibra, se simuló el efecto de los efectos lineales y no lineales en la propagación de las señales. Para una longitud de enlace de 100Km, se observó una degradación en el pulso gaussiano cuando la velocidad de transmisión es de 10 Gbps, esto se puede observar en la figura 10. En la figura 11 se puede observar la propagación de un pulso solitónico mediante la interfaz implementada, donde se observa que el pulso se mantiene a lo largo del tiempo de propagación. La incidencia de estos efectos varía dependiendo de la longitud del enlace, la potencia y la velocidad de transmisión y puede ser disminuido mediante diferentes métodos de compensación (Agrawal, 1995).

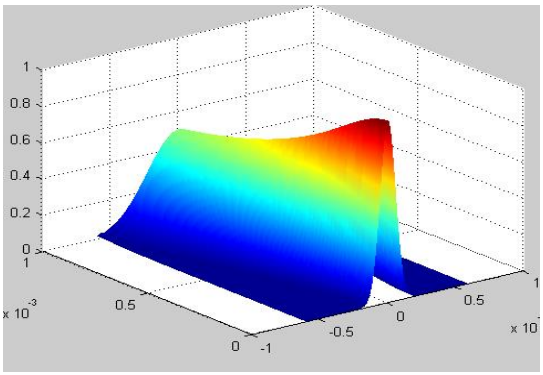


Figura 10. Propagación del pulso en enlace de fibra con degradación.
Fuente: Elaboración Propia.

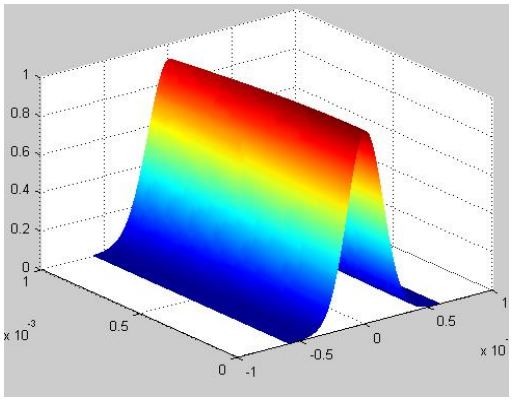


Figura 11. Propagación del pulso en el enlace de fibra con comportamiento solitónico.
Fuente: Elaboración Propia.

6. RECONOCIMIENTO

Los autores agradecen a la Universidad Francisco de Paula Santander. En especial al Grupo de Investigación y Desarrollo en Electrónica y Telecomunicaciones (GIDET), quienes apoyaron la realización de este proyecto.

7. CONCLUSIONES

• La ecuación no lineal de Schrödinger para un sistema de radio sobre fibra se puede obtener a partir de las ecuaciones de Maxwell, y puede ser solucionada mediante su forma analítica y numérica, observando que existe una dependencia entre la ecuación y sus componentes lineales y no lineales. El método exacto utilizado fue el método numérico de paso Split Step de Fourier, debido a que es uno de los métodos más utilizados en la solución de ecuaciones parciales no lineales.

• Se obtuvieron los resultados de la simulación de la ecuación para distintas velocidades de transmisión y potencias de entrada. Observando que la incidencia de los fenómenos lineales

depende directamente de la velocidad de transmisión y se presenta en forma de dispersión de velocidad de grupo y la aparición de los efectos no lineales se da a grandes potencias, generando el efecto Kerr en forma de SPM.

• Se evidenció el método de compensación de SPM a partir de la dispersión por velocidad de grupo. Esto se da debido a que la dispersión iguala el efecto de la no linealidad, lo que genera un balance en la frecuencia, que hace que los espectros en el pulso de salida se mantengan y no se deformen.

• Se observó el comportamiento del pulso gaussiano a lo largo de la fibra mediante la simulación realizada. Esta degradación en el pulso depende directamente de los parámetros de longitud del enlace y de la velocidad de transmisión (para definir intervalos de tiempo). Se observó además la propagación de un pulso solitónico, donde el pulso se mantiene a lo largo del tiempo de propagación y se observan pérdidas mínimas en el enlace de fibra.

REFERENCIAS

Fernández J. y González O. (2015). *Una red todo óptica para los servicios del futuro*, Revista Telos Comunicación e innovación.

Ramaswami, R y Sivarajan K. (2010). *Optical networks*, Segunda edición, Amsterdam.

Gómez F., Puerto K. y Guevara D. (2015). *La Fibra Óptica y el Fenómeno no Lineal Mezcla de Cuarta Onda*, Revista Mundo Fesc, no. 9, pp. 43-59.

Amagua N. y Mogro N. (2013). *Análisis y simulación de un enlace de radio sobre fibra óptica (RoF) a 60 GHz*, Universidad Técnica Salesiana, Quito.

Peralta A, Tipán M. y Amaya F. (2014). *Análisis de los efectos dispersivos y no lineales en un canal óptico empleando métodos numéricos*. Revista Ingenius, pp. 5-17.

Gómez P. (2015). *Evaluación de sistemas de comunicaciones ópticas y de radio sobre fibra a través de la caracterización de sus diferentes subsistemas y dispositivos*, Universidad Autónoma de Madrid, Madrid.

Soriano A. (2014). *Contribución a la modelización numérica de fibras ópticas microestructuradas*, Universidad de Córdoba, Córdoba.

Fu X., Dai J., Yu J., y Yang E. (2004). *Numerical simulation of multi-channel WDM transmission system in non-linear optical fiber communication system*, Electrical and Computer Engineering. Conferencia, vol. 3. IEEE, pp. 1819–1822, Canadá.

Saavedra F., Lamas A, Fernández M. y Cepeda Y. (2005). *Efectos de la modulación de fase cruzada sobre la propagación de ondas en fibra óptica*, Revista Facultad de ingeniería, Universidad Tarapacá, pp. 67-74.

Agrawal, G. (1995). *Fiber Optic Communication Systems: Compensation techniques*, 2nd Edition, Academic Press, San Diego.