MODELING AND DIGITAL CONTROL OF THE ANGLE PITCH OF A BICOPTER

MODELAMIENTO Y CONTROL DIGITAL DEL ANGULO PITCH DE UN BICOPTERO

***Older Ochoa Cruz, *Duvan A. Barrera Bernal, *MSc Camilo Andrés Sanabria, **PhD Liliana Fernandez Samaca**

Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia - UPTC
Escuela de Ingeniería Electrónica Seccional Sogamoso
*Grupo de Investigación en Robótica y Automatización Industrial – GIRA
**Grupo de Investigación en Procesamiento de Señales - DSP
E-mail: {older.ochoa, duvan.barrera, camilo.sanabria,liliana.fernandez}@uptc.edu.co

Abstract: In this article we present the mathematical modeling of a bicopter with two degrees of freedom built as a tool for training in the control area of the school in Electronic Engineering-UPTC sectional Sogamoso; Likewise, the design of a PID controller for the pitch angle of the prototype is exposed, where it has been assumed that the thrust corresponding to the yaw axis remains constant; finally the PID controller is implemented digitally in a PIC18F4550 microcontroller and the corresponding results are shown.

Keywords: Modeling, controller, bicopter, microcontroller.

Resumen: En este artículo se presenta el modelado matemático de un bicoptero de dos grados de libertad construido como herramienta para la formación en el área de control, de la escuela en Ingeniería Electrónica-UPTC seccional Sogamoso; así mismo se expone el diseño de un controlador PID para el ángulo pitch del prototipo, donde se ha asumido que el empuje correspondiente al eje yaw se mantiene constante; finalmente se implementa el controlador PID de forma digital en un microcontrolador PIC18F4550 y se muestran los resultados correspondientes.

Palabras clave: Modelado, controlador**,** bicoptero, microcontrolador.

1. INTRODUCCIÓN

El estudio de los modelos a escala de los helicópteros desarrollados como vehículos aéreos no tripulados, ha causado gran interés por parte de la comunidad de estudio del área de control, debido al alto grado de interacción de sus variables y a sus características no lineales, que hacen que estos sistemas sean difíciles de maniobrar (Marin Lopez & Bedoya Gonzalez, 2013). Quanser *innovate educate* presentan plantas de dos grados de libertad como soporte para la enseñanza y presenta diferentes trabajos de investigación que pueden verse en la página web: *https://www.quanser.com/quanser-community/research-papers/?fwp_research_papers_related_products=1689.*

Este artículo se presenta el modelado de un prototipo de bicoptero desarrollado como plataforma de aprendizaje activo en los cursos de control de Ingeniería electrónica de la UPTC sede Sogamoso, mediante el método de Euler LaGrange, determinando las variables de estado no lineales del movimiento y creando un modelo paramétrico que permite linealizar la planta alrededor del ángulo deseado. Para el controlador del ángulo pitch, se propone un desacoplamiento parcial de los dos movimientos, donde la velocidad de la hélice para el control eje yaw con ángulo ψ es constante, la posición del eje pich con ángulo θ es controlado con un controlador PID digital. Se presentan los resultados de las simulaciones obtenidas del modelo y su controlador, así como la implementación en un

microcontrolador PIC18F4550 de las ecuaciones de diferencias del controlador PID digital.

2. DESCRIPCIÓN DEL BICOPTERO

En la fig. 1 se presenta el prototipo de bicoptero (planta) construido para el desarrollo de asignaturas de Modelado y Control de la escuela de Ingeniería Electrónica de la UPTC sede Sogamoso, las cuales están enfocadas en un método de enseñanza basada en proyectos (Fernández Samacá, Ramírez, & Orozco Gutiérrez, 2012). En la tabla 1 se describen las partes básicas del prototipo que están señaladas en la fig. 1. La planta está construida en materiales al alcance de estudiantes de pregrado como los son, lámina acrílica transparente para los laterales, lámina acrílica de color negro, con un mayor grosor para dar soporte a la plataforma, y que corresponde al eje *pitch*, La base de la planta es de lámina unida a un tubo de metal y un rodamiento de tal manera que permite el movimiento de la planta en el eje *yaw*.

Este bicoptero tiene como actuadores dos motores brushless 1806 2300KV Quanum MT, con un consumo máximo de 8 A, que son utilizados comúnmente en aplicaciones de drones. Cada motor cuenta con un driver que se encarga a través de una señal de tipo PWM, de cambiar la velocidad del mismo; además se cuenta con un sistema embebido construida por los estudiantes, cuyo núcleo es el microcontrolador de gama media PIC18F4550 de microchip.

Tabla 1: Componentes Bicoptero

Ítem	*Descripción*
1	*Tarjeta Electrónica para control del bicoptero*
2	*Tubo soporte Eje de rotación yaw*
3	*Tubo soporte sentido de la rotación para pitch*
4	*Soporte en acrílico Sensor, eje de pitch, estructura Bicoptero*
5	*Potenciómetro lineal de una Vuelta*
6	*Hélice para control del posición en Yaw*
7-8	*Motores brushless 2300KV*
9	*Hélice para control del posición en pitch*
10	*Cilindro de aluminio*
11	*Posición en z del centro de masa*
12	*Posición en x del centro de masa*
13	*Drivers de velocidad 12 A.*

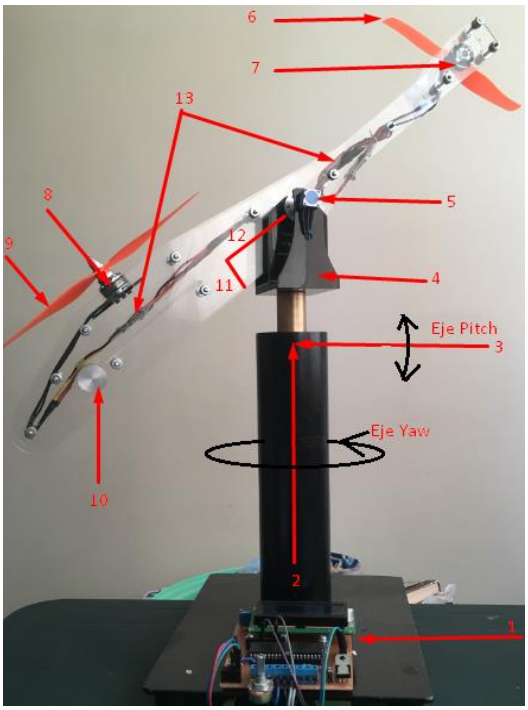


Fig. 1. Planta del bicoptero con sus respectivas partes a destacar.

3. MODELO MATEMÁTICO DEL BICOPTERO

El modelo matemático se obtiene mediante Euler-Lagrange, basándose en el análisis de energía cinética y potencial correspondiente al pivoteo en el eje *pitch* que estará asociado al ángulo θ y alrededor del eje *yaw* asociado al ángulo ψ (Quanser, 2006). En tabla 2 se relacionan parámetros que son utilizados normalmente para el modelado de bicopteros (Vivas, 2011). En la tabla 3, se presentan los parámetros que han sido registrados para la planta construida.

Tabla 2: Parámetros Bicoptero

Símbolo	*Descripción*	*Unidad*
Kpp	*Constante de voltaje a torque actuando en el eje Pitch debida al voltaje aplicado al motor de Pitch*	*N.m/V*
Kpy	*Constante de voltaje a torque actuando en el eje Pitch debida al voltaje aplicado al motor de Yaw*	*N.m/V*
Kyp	*Constante de voltaje a torque actuando en el eje Yaw debida al voltaje aplicado al motor de Pitch*	*N.m/V*
Kyy	*Constante de voltaje a torque actuando en el eje Yaw debida al voltaje aplicado al motor de Yaw*	*N.m/V*
Fcpp	*Constante debida a la fricción de coulomb*	*N.m/V*
Fcpy	*Constante debida a la fricción de coulomb*	*N.m/V*
Fcyp	*Constante debida a la fricción de coulomb*	*N.m/V*
Fcyy	*Constante debida a la fricción de coulomb*	*N.m/V*

Bp	*Fricción viscosa del eje Pitch*	*N/V*
By	*Fricción viscosa del eje Yaw*	*N/V*
Jshaft	*Momento de inercia del eje metálico*	*kg.m^2*
Jeqp	*Momento de inercia equivalente alrededor del eje Pitch*	*kg.m^2*
Jeqy	*Momento de inercia equivalente alrededor del eje Yaw*	*kg.m^2*
Vmp	*Voltaje Aplicado al motor pitch*	*V*
Vmy	*Voltaje aplicado al motor Yaw*	*V*

Tabla 3: Parámetros Bicoptero fig. 1

Símbolo	Descripción	Valor
Mheli	*Masa móvil total del helicóptero*	*13.872 kg*
mmp	*Masa del motor de Pitch*	*0.292 kg*
mmy	*Masa del motor de Yaw*	*0.128 kg*
mshieldy	*Masa del ensamblaje de la hélice Yaw*	*0.167 kg*
mshieldp	*Masa del ensamblaje de la hélice Pitch*	*0.167 kg*
mbodyp	*Masa que se mueve alrededor del eje Pitch*	*0.633 kg*
mbodyy	*Masa que se mueve alrededor del eje Yaw*	*0.667 kg*
mshaft	*Masa del eje metálico que gira alrededor del eje Yaw*	*0.151 kg*
Lbody	*Longitud total del cuerpo del Bicoptero*	0.528 *m*
Lshaft	*Longitud del eje metálico que gira alrededor del eje Yaw*	*0.28 m*
lmc	*Posición en x del centro de masa*	*0.072 m*
h	*posición en z del centro de masa*	*0.024 m*

Conocidas las ecuaciones de energía potencial y cinética del modelo, se determina el Lagrangiano, de esta manera se obtienen las ecuaciones de la dinámica del sistema mediante la ecuación de Lagrange (Vivas, 2011); (Craig, 1989); (Baturone, 2001); donde se obtuvieron las siguientes ecuaciones:

$$A\ddot{\theta} + C\ddot{\psi}^2 + D + Bp\dot{\theta} = \left(K_{pp}V_{mp} + F_{cpp}\right) + \left(K_{py}V_{my} + F_{cyp}\right) \quad (1)$$

$$E\ddot{\psi} + F\dot{\theta}\dot{\psi} + By\dot{\psi} = \left(K_{yp}V_{mp} + F_{cyp}\right)\cos\theta + \left(K_{yy}V_{my} + F_{cyy}\right)\cos\theta \quad (2)$$

Donde los valores *A, C, D, E* y *F* corresponden a:

$$A = \left(J_{eqP} + M_{heli}\left(l_{mc}{}^2 + h^2\right)\right)$$

$$C = M_{heli}\left[\frac{sen2\theta(l_{mc}{}^2 - h^2)}{2} - l_{mc}h\cdot\cos 2\theta\right]$$

$$D = M_{heli}\cdot g\left(l_{mc}\cos\theta + h\cdot sen\theta\right)$$

$$E = \left(J_{eqY} + M_{heli}\left[\cos^2\theta\left(l_{mc}{}^2 + h^2\right) + l_{mc}h\cdot sen2\theta + h^2\right]\right)$$

$$F = M_{heli}\left[sen2\theta\left(h^2 - l_{mc}{}^2\right) + 2l_{mc}h\cdot cos2\theta\right]$$

(3)

3.1 Variables de estado de ecuaciones no lineales de movimiento.

A continuación se definen las variables de estado para la planta y las señales de entrada:

$$\begin{aligned} x1 &= \theta & x2 &= \psi \\ x3 &= \dot{\theta} & x4 &= \dot{\psi} \\ u1 &= V_{mp} & u2 &= V_{my} \end{aligned} \quad (4)$$

Se obtienen los estados de las funciones no lineales correspondiente a cada ecuación, para θ (1) y para ψ (2)

$$\begin{aligned} \dot{x}1 &= \dot{\theta} = f1(X) = x3 \\ \dot{x}2 &= \dot{\psi} = f2(X) = x4 \\ \dot{x}3 &= \ddot{\theta} = f3(X) = \frac{-C\dot{\psi}^2 - D - B_p\dot{\theta} + \left(K_{pp}V_{mp} + F_{cpp}\right) + \left(K_{py}V_{my} + F_{cpy}\right)}{A} \\ \dot{x}4 &= \ddot{\psi} = f4(X) = \frac{-F\dot{\theta}\dot{\psi} - B_Y\dot{\psi} + \left(K_{yp}V_{mp} + F_{cyp}\right)\cos\theta + \left(K_{yy}V_{my} + F_{cyy}\right)\cos\theta}{E} \end{aligned} \quad (5)$$

A partir de los estados obtenidos en (5), se realiza una linealización alrededor del punto de equilibrio inducido por $\overline{X1} = \bar{\theta}$ constante, obteniéndose un

modelo lineal parametrizado por $\bar{\theta}$ (Vivas, 2011) (Khalil, 2000), presentado a continuación:

$$\dot{x}_\delta = A(\bar{\theta})X_\delta + B(\bar{\theta})U_\delta \qquad (6)$$

Donde

$$X_\delta = X - \bar{X} \qquad U_\delta = U - \bar{U}$$

$$A(\bar{\theta}) = \frac{\partial f(X)}{\partial(X)} \qquad B(\bar{\theta}) = \frac{\partial f(X)}{\partial(U)}$$

$$A(\bar{\theta}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(X)}{\partial(X1)} & \frac{\partial f_1(X)}{\partial(X2)} & \frac{\partial f_1(X)}{\partial(X3)} & \frac{\partial f_1(X)}{\partial(X4)} \\ \frac{\partial f_2(X)}{\partial(X1)} & \frac{\partial f_2(X)}{\partial(X2)} & \frac{\partial f_2(X)}{\partial(X3)} & \frac{\partial f_2(X)}{\partial(X4)} \\ \frac{\partial f_3(X)}{\partial(X1)} & \frac{\partial f_3(X)}{\partial(X2)} & \frac{\partial f_3(X)}{\partial(X3)} & \frac{\partial f_3(X)}{\partial(X4)} \\ \frac{\partial f_4(X)}{\partial(X1)} & \frac{\partial f_4(X)}{\partial(X2)} & \frac{\partial f_4(X)}{\partial(X3)} & \frac{\partial f_4(X)}{\partial(X4)} \end{bmatrix}$$

$$B(\bar{\theta}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(X)}{\partial u1} & \frac{\partial f_1(X)}{\partial u2} \\ \frac{\partial f_2(X)}{\partial u1} & \frac{\partial f_2(X)}{\partial u2} \\ \frac{\partial f_3(X)}{\partial u1} & \frac{\partial f_3(X)}{\partial u2} \\ \frac{\partial f_4(X)}{\partial u1} & \frac{\partial f_4(X)}{\partial u2} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (7)$$

Las variables de salida para el sistema se especifican en la matriz C de las ecuaciones en (7) , y corresponden a los ángulos de *pitch* y *yaw.*

3.2 Sistema en funciones de transferencia

El modelo lineal paramétrico, también se puede ver representado mediante un sistema de funciones de transferencia como se muestra en (8), y que está representado en la fig. 2. Como un diagrama de bloques (Chau, 2002).

$$\begin{bmatrix} \theta(s) \\ \psi(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G11(s) & G12(s) \\ G21(s) & G22(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Vmp(s) \\ Vmy(s) \end{bmatrix} \qquad (8)$$

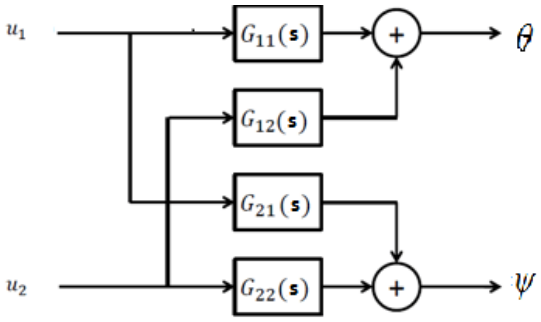


Fig. 2. Diagrama Bloques sistema MIMO 2x2.

Las funciones de transferencia de la ecuación matricial (8), se especifican como:

$$\begin{aligned} G11(s) &= \frac{Kpp}{k_1 s^2 + B_p s + k_2} \\ G12(s) &= \frac{Kpy}{k_1 s^2 + B_p s + k_2} \\ G21(s) &= \frac{-Kyp\,\mathrm{Cos}\,\bar{\theta}}{k_3 s^2 + B_y s} \\ G22(s) &= \frac{-Kyy\,\mathrm{Cos}\,\bar{\theta}}{k_3 s^2 + B_y s} \end{aligned} \qquad (9)$$

Donde

$$\begin{aligned} k_1 &= J_{eqp} + M_{heli}\left(lmc^2 + h^2\right) \\ k_2 &= M_{heli} g\left(h\cos\bar{\theta} - l_{mc}\sin\bar{\theta}\right) \\ k_3 &= J_{eqp} + M_{heli}\begin{bmatrix} \cos^2\bar{\theta}\left(l_{mc}{}^2 + h^2\right) \\ +2l_{mc} h\sin\bar{\theta}\cos\bar{\theta} + h^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \qquad (10)$$

Las funciones de transferencia *G11(s)* y *G22(s)* son las funciones principales del sistema para el control de posición, las otras dos son las perturbaciones o grado de incidencia en el control de los ángulos pitch y yaw, entre ellos.

Con el propósito de diseñar un controlador tipo PID al sistema, se decide desacoplar los movimientos tomando como principal el movimiento en pitch, que se representa en la función *G11(s)*, dando un valor contante de a la velocidad del motor de yaw basado en prácticas de laboratorio donde esta contrarresta la fuerza de empuje generada por la hélice en pitch al momento de levantar la nariz del bicoptero.

Desacoplando los movimientos y remplazando los valores del prototipo en la función de transferencia G11*(s)* de las ecuaciones (9) y (10) se obtiene:

$$G11(s) = \frac{36.69}{s^2 + 0.3217s + 7.921} \qquad (11)$$

En la fig. 3 se puede observar el resultado de simulación donde se realiza una entrada tipo escalón al voltaje del motor de pitch, el ángulo de pitch se estabiliza en 23.7 segundos, siendo la respuesta muy lenta y que presenta muchas oscilaciones que podrían ocasionar las averías en la planta. Las oscilaciones se dan porque la ecuación en (11); corresponde a un sistema subamortiguado con un factor de amortiguamiento de 0.05 y una frecuencia natural de 2.81 rad/s.

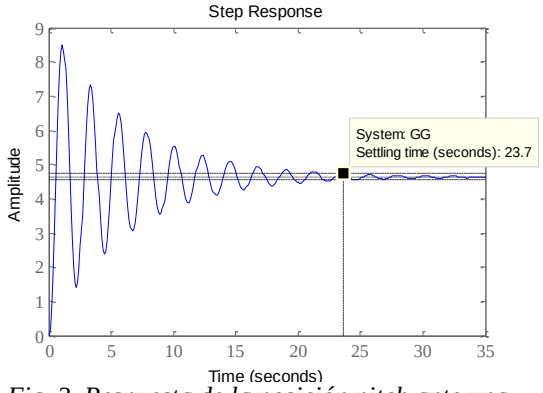


Fig. 3. Respuesta de la posición pitch ante una función impulso.

4. DISEÑO DE CONTROLADOR ANGULO PITCH.

Se plantea el lazo de control únicamente del ángulo pitch con un controlador tipo PID para la *G11(s)* y se retroalimenta tal función como se muestra en la fig. 4 (Ogata, 1998). Al reducir el diagrama de bloques de la fig. 4, se obtiene una nueva función de transferencia en términos de las constantes del controlador *Ki, Kp, Kd* como se observa en la ecuación (12).

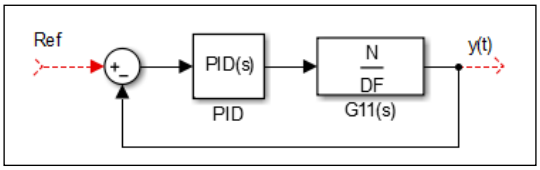


Fig. 4. Implementación para obtener el polinomio característico de las contantes del controlador.

$$GD(s) = \frac{(kds^2 + kps + ki) * 36.7}{s^3 + (0.322 + 36.7kd)s^2 + (7.92 + 36.7kp)s + 36.7ki} \qquad (12)$$

El modelo de referencia para la obtención del polinomio característico deseado se diseñó con las siguientes características; un tiempo de asentamiento menor a 5 segundos, un factor de amortiguamiento de 0.7 y una asignación de un tercer polo alejado 30 veces en el eje horizontal del plano S de los polos dominantes

$$GD(S) = \frac{47.66}{s^3 + 29.44\,s^2 + 52.51s + 47.66} \qquad (13)$$

Realizando la igualación de polinomios de las ecuaciones (12) y (13) se obtienen las constantes del controlador PID, mostradas a continuación

$$Kp = 1.21; Ki = 1.3; kd = 0.79 \qquad (14)$$

4.1. Discretización del controlador PID.

De los aspectos importantes para la implementación del controlador PID en discreto o digital es el tiempo de muestreo, si se toman muy pocas muestras la señal de control no se puede realizar controlar de forma adecuada el sistema. Se recomienda muestrear 10 veces el tao de la planta pero para este caso se ha tomado la decisión de muestrear a 30 veces el tao del modelo deseado GD*(s)*.

$$Tm = \frac{\frac{1}{\rho \cdot \omega o}}{30} = \frac{\frac{1}{0.7 * 1.096}}{30} = 36ms \qquad (15)$$

Las constantes del PID en discreto se definen como de la siguiente forma:

$$kpd = kp - \frac{Tm \cdot ki}{2} = 1.19$$
$$kid = Tm \cdot ki = 0.0471 \qquad (16)$$
$$kdd = \frac{kd}{Tm} = 21.90$$

5. RESULTADOS

5.1 Resultados de simulación

La grafica de la fig. 5 muestra la respuesta del controlador análogo y discreto donde se puede observar que el tiempo de asentamiento es

cercano al deseado; el PID discreto presenta un comportamiento más brusco en el primer segundo de la simulación, que el correspondiente controlador analógico, debido al efecto del tiempo de muestreo.

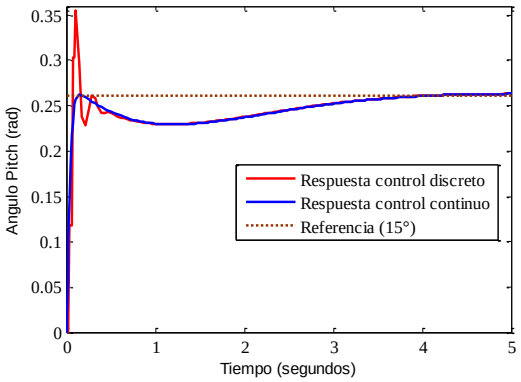


Fig. 5. Respuesta controlador PID análogo línea roja, PID discreto línea Azul.

5.2 Resultados de la planta Física Bicoptero

La fig. 6 muestra el bicoptero en vuelo, el cual se cierra el lazo de control en el eje pitch con un sistema embebido y con el motor del eje yaw con un voltaje de entrada constante. En las ecuaciones (18) y (17) se muestran las ecuaciones de diferencias correspondientes a la implementación del algoritmo PID de control, siendo *u(k)* el valor actual de salida del controlador y *e(k)* el valor actual del error.

$$\begin{aligned} p(k) &= kpd * e(k) \\ i(k) &= u(k-1) + kid * e(k) \\ d(k) &= kdd * e(k) - kdd * e(k-1) \end{aligned} \qquad (17)$$

$$u(k) = p(k) + i(k) + d(k) \qquad (18)$$

La implementación de la ecuación de diferencia se realizó en un una tarjeta electrónica cuyo núcleo es un microcontrolador PIC18F4550 como se aprecia en la fig. 1.

6. CONCLUSIONES

Mediante la aplicación de la metodología de aprendizaje basado en proyectos, se pueden lograr dispositivos de bajo costo que permiten a los estudiantes aplicar diversos conceptos del área de control, como es el caso de estudio de este artículo.



Fig.6. Planta controlada

En el momento de realizar la implementación en el sistema embebido del controlador digital, se presentaron algunas dificultades con los drivers de los motores, al tener un rango muy pequeño para las señales de control, las cuales fueron imposibles de prever en las etapas de análisis y simulación

El controlador digital implementado funciono adecuadamente para perturbaciones en el eje pitch en un rango máximo de 30°.

REFERENCIAS

Baturone, A. O. (2001). *Robótica, Manipuladores y Robots Móviles.* Alfaomega.

Chau, P. C. (2002). *Process Control: A firts course with MATLAB.* Cambridge University prees.

Craig, J. (1989). *Introduction to Robotics, Mechanics and Control.* Q. Addison-Wesley.

Fernández Samacá, L., Ramírez, J. M., & Orozco Gutiérrez, M. L. (Janeiro e Fevereiro de 2012). PROJECT-BASED LEARNING APPROACH FOR CONTROL SYSTEM. *Revista Controle & Automação*, pág. 14.

Khalil, H. (2000). *Nonlinear Systems* (1 edition ed.). Prentice Hall.

Marin Lopez, A. A., & Bedoya Gonzalez, A. J. (2013). *Diseño y Control multivariable de un helicóptero de dos grados de libertad. Anteproyecto de tecnología.* Risaralda, Colombia.

Ogata, K. (1998). *Ingeniería de Control Moderna.* EEUU: Prentice-Hall.

Quanser, E. I. (2006). *Quanser 2dof helicopter user and control manual. 2006.*

Vivas, E. C. (2011). *Control del Helicoptero 2D Usando H.infinito.* Bogota: Universidad Nacional.