ANALYSIS OF THE CAOTICO SYSTEM "ATRACTOR DE LORENZ", AND IMPLEMENTATION IN CLOSED LOOP IN A DSPIC MICROCONTROLLER

ANÁLISIS DEL SISTEMA CAÓTICO "ATRACTOR DE LORENZ", E IMPLEMENTACIÓN EN LAZO CERRADO EN UN MICRONTROLADOR DSPIC

MSc. Camilo Sanabria Totaitive, Ing. Delby Bello Guzmán, Ing. Mónica Martin Ortiz

Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia UPTC.
Grupo de investigación en Robótica y Automatización Industrial GIRA-UPTC.
Escuela de Ingeniería Electrónica. Calle 4 Sur # 15-134, Sogamoso, Boyacá, Colombia.
E-mail: {camilo.sanabria, delby.bello01, monica.martin}@uptc.edu.co

Abstract: In this paper we present the dynamic model of the chaotic system known as the Lorenz Attractor, performing an analysis of its linearity characteristics and a closed loop simulation of it with a state controller based on LMI. The results of the simulations are verified by the implementation of the model of the attractor and the obtained controller, in an embedded system based on a microcontroller DSPIC30F4013.

Keywords: Lorenz Attractors, Control, DSPIC.

Resumen: En este trabajo se presenta el modelo dinámico del sistema caótico conocido como Atractor de Lorenz, realizándose un análisis de sus características de linealidad y una simulación en lazo cerrado del mismo con un controlador de estados basado en LMI. Los resultados de las simulaciones son verificados mediante la implementación del modelo del atractor y del controlador obtenido, en un sistema embebido basado en un microcontrolador DSPIC30F4013.

Palabras clave: Atractor de Lorenz, Control, DSPIC.

1. INTRODUCCIÓN

En los últimos años, ha habido un interés creciente en investigar e implementar sistemas caóticos en el área de control. Sin embargo, estos sistemas, dada su dinámica no lineal, conducen al caos y se caracterizan por su gran complejidad física, por ser no periódicos, con una alta sensibilidad a las condiciones operativas iniciales y cuya predicción es difícil en el largo plazo (Pham, Kingni, Volos, Jafari, & Kapitaniak, 2017; Shah, Chaurasiya, Vyawahare, Pichhode, & Patil, 2017; Strogatz, 2000; Zambrano-Serrano, Muñoz-Pacheco, & Campos-Cantón, 2017).

La teoría del caos para sistemas dinámicos no lineales presentes en la naturaleza ha sido tratada con gran interés en áreas como la física, la química, las ciencias sociales y las ciencias técnicas. Los investigadores han encontrado un amplio campo de acción desde que se encontraron los primeros atractores caóticos en aplicaciones como desarrollo aeroespacial, biología, sistemas de potencia, comunicaciones y sistemas de control automático, entre otros (Lilian, Xiaoyan, & Guanghui, 2010)

La mayoría de los trabajos con sistemas caóticos y sus aplicaciones se han orientado fundamentalmente a la implementación de estos sistemas basados en circuitos electrónicos analógicos, sistemas de desarrollo como FPGA (*Field Programmable Digital Gate Arrays*), microcontroladores y DSP (*Digital Signal Processor*), entre otros (Chiu, Mora-González, &

López-Mancilla, 2014; Pham et al., 2017; Shah et al., 2017; Zambrano-Serrano et al., 2017). Se presentan simulaciones por computadora desarrolladas por autores en diferentes trabajos en sistemas caóticos de circuito abierto, análisis de las características y dinámicas de los sistemas o con diversas estrategias de control entre las cuales se encuentran PID óptimos, reguladores difusos basados en modelos y estrategias de control óptimo (Chiu et al., 2014; Das, Acharya, & Pan, 2014; Grant, 2009; Liu & Yang, 2010)

El atractor de Lorenz fue desarrollado en 1963 por Edward Lorenz en el MIT. Básicamente la ecuación diferencial describe el comportamiento de la atmósfera terrestre. En (Grant, 2009), el autor analiza las ecuaciones diferenciales de los atractores exteriores y sugiere un modelo de seguimiento de tres variables: a) x_1 que es la convección del flujo atmosférico, b) x_2 que está relacionado con la temperatura horizontal de la atmósfera y c) relacionado x_3 a la temperatura vertical de la atmósfera.

El presente artículo está organizado de la siguiente manera: en la sección 1 se presenta la introducción, en la sección 2 se realiza el análisis dinámico del atractor, estudiando la linealización alrededor de los puntos de equilibrio. En la sección 3, se describe la implementación del atractor y un controlador de manera digital en un microcontrolador DSPIC30F4013 presentándose algunos resultados experimentales.

2. ANÁLISIS DINÁMICO DEL SISTEMA

2.1 Modelo del sistema.

Basado en las ecuaciones de Lorenz, su modelo matemático es:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= \alpha x_1(t) - \alpha x_2(t)\\ \dot{x}_2(t) &= \rho x_1(t) - x_1(t)x_3(t) - x_2(t)\\ \dot{x}_3(t) &= x_1(t)x_2(t) - \beta x_3(t) + \gamma u(t)\end{aligned} \quad (1)$$

Los puntos de equilibrio del atractor se generan igualando cada una de las ecuaciones del sistema a cero, obteniéndose los siguientes resultados:

$$Xe = \begin{bmatrix} -\sqrt{\beta(\rho-1)-\gamma u} \\ -\sqrt{\beta(\rho-1)-\gamma u} \\ (\rho-1) \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$ue = 0 \quad (3)$$

El sistema caótico del atractor de Lorenz es analizado como se indica en varios artículos, (Conte, Moog, & Perdon, 2007; Chernous'ko, Ananievski, & Reshmin, 2008; Levine, 2009; Strogatz, 2000) con el objetivo de determinar en primer lugar si el sistema es linealizable. Para establecer la posibilidad de linealizar el sistema, se deben determinar las condiciones de involutibilidad del sistema no lineal a partir del análisis de los siguientes campos vectoriales del sistema caótico:

$$\left(G,\, ad_F^1 G,\, ad_F^2 G\right) = \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 \\ \gamma x_1 \\ \gamma\beta \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} \alpha\gamma x_1 \\ [\alpha+(\beta+1)]\gamma x_1 - \alpha\gamma x_2 \\ -\gamma x_1^2 + \beta^2\gamma \end{bmatrix} \right) \quad (4)$$

Donde los campos vectoriales $\left(G,\, ad_F G,\, ad_F^2 G\right)$ se definen a partir del espacio de estado de (1), el cual se vuelve a presentar en (5) y en las ecuaciones dadas en (6).

$$\begin{aligned}\dot{X}(t) &= F(X) + G(X)u(t)\\ \dot{X}(t) &= \begin{bmatrix} \alpha x_1(t) - \alpha x_2(t) \\ \rho x_1(t) - x_1(t)x_3(t) - x_2(t) \\ x_1(t)x_2(t) - \beta x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma \end{bmatrix} u(t)\end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} ad_F^1\, G &= -\left(\nabla_X F\right)\bullet G\\ ad_F^2\, G &= \left[\nabla_X \left(ad_F^1 G\right)\right]\bullet F(X)\\ &\quad -\left(\nabla_X F\right)\bullet\left(ad_F^1 G\right)\end{aligned} \quad (6)$$

A partir de (4) se logró determinar que el modelo matemático del atractor de Lorenz es linealizable si y solo sí $x_1 \neq 0$. Por lo tanto se determina la linealización del atractor en torno a sus puntos de equilibrio obteniéndose las siguientes expresiones matriciales:

$$\frac{\partial F}{\partial X} = \begin{bmatrix} -\alpha & \alpha & 0 \\ \rho - Xe_3 & -1 & -Xe_1 \\ Xe_2 & Xe_1 & -\beta \end{bmatrix} = A_o \quad (7)$$

$$\frac{\partial F}{\partial u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma \end{bmatrix} = B_o \quad (8)$$

A partir de (7) y (8), el modelo lineal propuesto para el sistema es:

$$\begin{aligned}\dot{X}(t) &= A_o X(t) + B_o u(t)\\ Y(t) &= C X(t)\end{aligned} \quad (9)$$

Para controlar el sistema, es importante analizar la matriz de controlabilidad del sistema presentada a continuación:

$$C_o = \begin{bmatrix} B_o & A_o B_o & A_o^2 B_o \end{bmatrix}$$

$$C_o = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\alpha\gamma Xe_1 \\ 0 & -\gamma Xe_1 & (\beta+1)\gamma Xe_1 \\ \gamma & -\beta\gamma & -\gamma\left(Xe_1^2 - \beta^2\right) \end{bmatrix} \quad (10)$$

El rango de esta matriz es igual a 3 y por lo tanto el determinante de la matriz de controlabilidad es diferente a cero, en consecuencia, el sistema es totalmente controlable.

2.2 Control e implementación del sistema de Atractor de Lorenz.

El modelo de atractor no lineal de Lorenz se simuló usando un bloque S-Function de Matlab®. Para la simulación se asumieron los siguientes valores para las constantes del atractor de Lorenz $\alpha = 10, \beta = 1, \gamma = 20, \rho = 2$; Las constantes de la realimentación de estados se calculan mediante la técnica de LMI (Boyd, EL Ghauoui, Feron, & Balakrishnan, 1994) y corresponden al siguiente vector de control $K_0 = \left(-0.0849 \quad -0.4517 \quad 0.1138\right)$, con los cuales se prueba en el modelo no lineal como se muestra en la fig. 1.

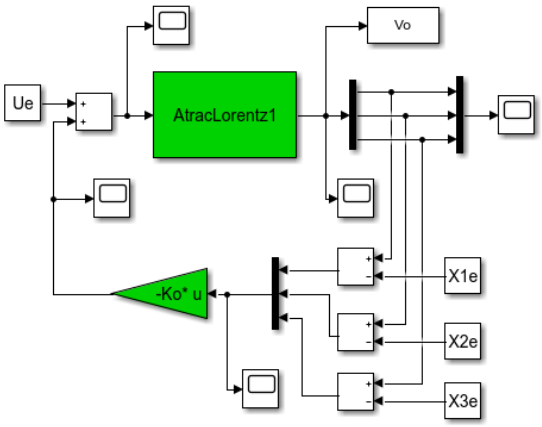


Fig. 1. Diagrama de bloques del sistema controlado

La simulación inicia con el siguiente vector de condiciones iniciales $Xi = \left(-1.0 \quad 0.5 \quad 1.0\right)$, donde se ha colocado la variable x_1 lejos de su punto de equilibrio teórico y diferente de cero para cumplir con la condición de linealización.

En la fig. 2 se observa como el controlador basado en la técnica de LMI, logra conducir al atractor a los puntos de equilibrio deseados $Xe = \left(0.5 \quad 0.5 \quad 1\right)$ en un tiempo aproximado de 2 segundos.

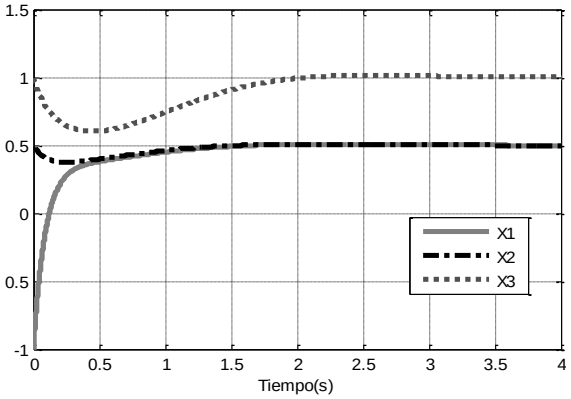


Fig. 2. Respuesta del sistema en lazo cerrado con un $Xi = \left(-1.0 \quad 0.5 \quad 1.0\right)$

3. IMPLEMENTACIÓN DEL ATRACTOR DE LORENZ EN UN DSPIC

El modelo matemático del atractor de Lorenz dados por las ecuaciones en (1) y el lazo de control propuesto en la fig. 1 se implementaron en un sistema embebido basado en el microcontrolador DSPIC30F4013 de Microchip®, al que se agregaron tres conversores analógico-digital de 8 bits para obtener las señales de las variables de estados x_1, x_2 y x_3.

El tiempo de muestreo para el cálculo del sistema fue de 2 ms. Para obtener las variables de las ecuaciones de estado x_1, x_2 y x_3, se programa un algoritmo de integración de Euler hacia atrás en el microcontrolador PIC.

La ley de control que se implementó se muestra en la ecuación (8), siendo u la señal de entrada al modelo no lineal del atractor de Lorenz.

$$\begin{aligned} x_{1C} &= x_1 - x_{1e} \\ x_{2C} &= x_2 - x_{2e} \\ x_{3C} &= x_3 - x_{3e} \\ u &= u_e - \left(K_{01} * x_{1C} + K_{02} * x_{2C} + K_{03} * x_{3C}\right) \end{aligned} \quad (11)$$

Dónde x_{1C}, x_{2C}, x_{3C} son constantes del controlador y x_{1e}, x_{2e}, x_{3e} los puntos de equilibrio seleccionados.

Los resultados del sistema no lineal implementado en el microcontrolador en lazo

abierto y lazo cerrado con las constantes de control calculados mediantes LMI, se muestran en la fig. 3 y la fig. 4.

En la fig. 3 se muestra como el atractor de Lorenz tiende a buscar sus puntos de equilibrio $Xe = (0.5 \;\; 0.5 \;\; 1)$ en un periodo de aproximadamente 7 segundos. En la fig. 4 se presenta el efecto de utilizar el controlador de estado mediante LMI, en donde se obtiene una respuesta de 3 segundos para el mismo vector de condiciones iniciales. También es de anotar que con el uso del controlador se pueden determinar puntos de operación o equilibrio diferentes, como es el caso de la variable de estado x_3, que se ajustó a 1.2 en la respuesta presentada en la fig. 4.

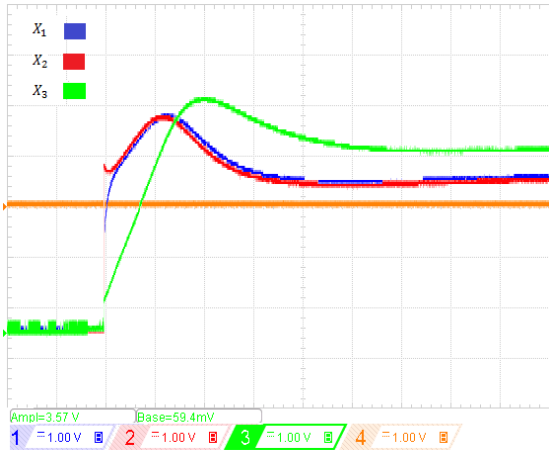


Fig. 3. Respuesta del sistema en lazo abierto con $u = u_e$.

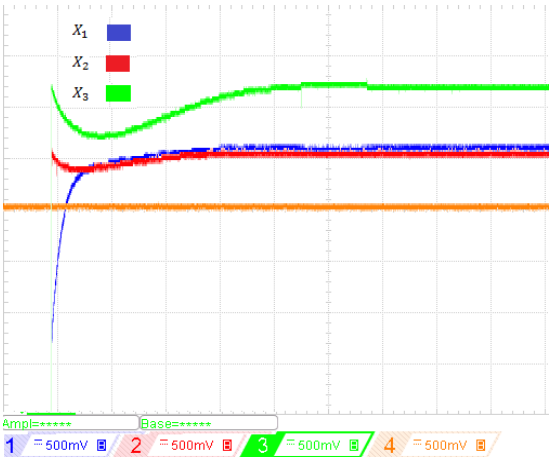


Fig. 4. Respuesta del sistema de lazo cerrado con Control LMI en $Xi = (-1.0 \;\; 0.5 \;\; 1.0)$.

De acuerdo con los puntos de equilibrio y las condiciones de linealización determinadas, el sistema no es controlable en cero, esto se observa en la fig. 5, cuando el sistema comienza en los puntos $Xi = (0.0 \;\; 0.0 \;\; -1.0)$, no alcanzando los puntos de equilibrio deseados de la fig. 4.

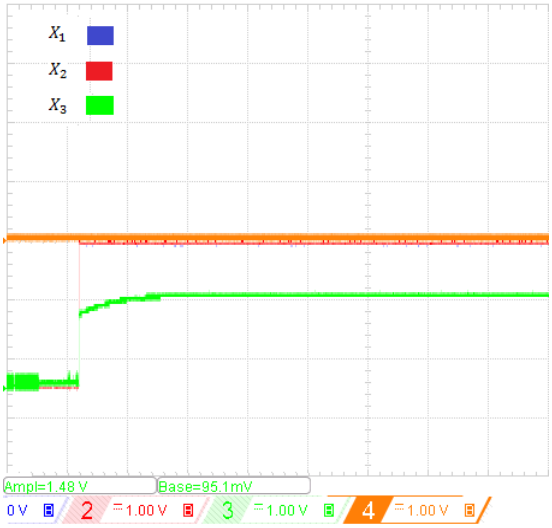


Fig. 5. Respuesta del sistema en lazo cerrado con Control LMI en $Xi = (0.0 \;\; 0.0 \;\; -1.0)$.

En los resultados experimentales, se encontró que el sistema presenta un comportamiento inestable cuando la variable x_2 es la única que inicia en cero, o que esta variable sea negativa sin importar el valor de las demás variables, como se muestra en la fig. 6.

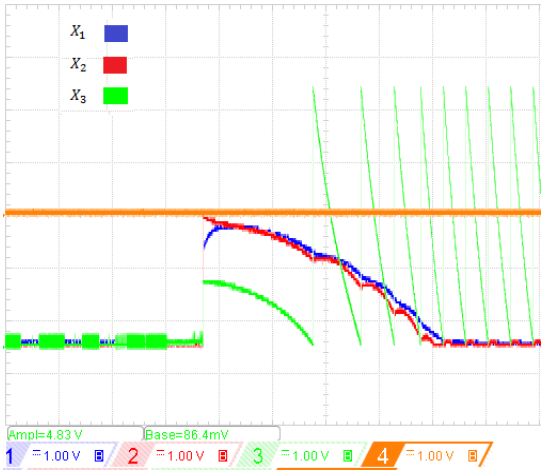


Fig. 6. Respuesta del sistema en lazo cerrado con Control LMI en $Xi = (-0.5 \;\; 0.0 \;\; -1.0)$

4. RECONOCIMIENTO

Los autores hacen un reconocimiento muy especial al ingeniero Juan Mauricio Salamanca Q.E.P.D. Sin sus conocimientos y valiosa colaboración en el área de control no lineal y de LMI este artículo no sería posible.

5. CONCLUSIONES

El atractor de Lorentz es un sistema no lineal que presenta comportamientos caóticos representando desafíos para la teoría de control. El modelo lineal obtenido por linealización alrededor de los puntos de equilibrio es completamente controlable si y solo si el estado es $x_1 \neq 0$.

Gracias a la implementación digital desarrollada del atractor de Lorenz y del control propuesto en el DSPIC, se logra obtener resultados del comportamiento del sistema en lazo cerrado con distintos puntos de inicio de las variables de estado del atractor. También se logran probar algunas condiciones de inestabilidad que corroboran las condiciones de linealización dadas y otras que no se observaron en el análisis teórico.

REFERENCIAS

Boyd, S. P., EL Ghauoui, L., Feron, E., & Balakrishnan, V. (1994). *Linear matrix inequalities in system and control theory*, Society for Industrial and Applied Mathematics-SIAM, Vol. 15, Filadelfia

Conte, G., Moog, C., & Perdon, A. M. (2007). *Algebraic Methods for Nonlinear Control Systems*, Springer-Verlag London.

Chernous'ko, F. L., Ananievski, I. M., & Reshmin, S. A. (2008). *Control of Nonlinear Dynamical Systems: Methods and Applications*, Springer, Communications and Control Engineering, Berlin.

Chiu, R., Mora-González, M., & López-Mancilla, D. (2014). "Osciladores Caóticos implementados en Microcontrolador PIC18F". Revista electrónica Nova scientia Vol. 6, No 12.

Das, S., Acharya, A., & Pan, I. (2014). "Simulation studies on the design of optimum PID controllers to suppress chaotic oscillations in a family of Lorenz-like multi-wing attractors". Mathematics and Computers in Simulation 100, Pag. 72-87.

Grant, R. J. (2009). *Numerical Computing With Simulink, Volume I: Creating Simulations*, The American Statistician SIAM, Massachusetts.

Levine, J. (2009). *Analysis and Control of Nonlinear Systems: A Flatness-based Approach*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

Lilian, H., Xiaoyan, W., & Guanghui, S. (2010). "Design and circuit simulation of the new Lorenz chaotic system". 3rd International Symposium on Systems and Control in Aeronautics and Astronautics.

Liu, Y., & Yang, Q. (2010). "Dynamics of a new Lorenz-like chaotic system". Nonlinear Analysis: Real World Applications 11, Pag. 2563-2572.

Pham, V.-T., Kingni, S. T., Volos, C., Jafari, S., & Kapitaniak, T. (2017). "A simple three-dimensional fractional-order chaotic system without equilibrium: Dynamics, circuitry implementation, chaos control and synchronization". International Journal of Electronics and Communications, Vol. 78, Pag. 220-227.

Shah, D. K., Chaurasiya, R. B., Vyawahare, V. A., Pichhode, K., & Patil, M. D. (2017). "FPGA implementation of fractional-order chaotic systems". International Journal of Electronics and Communications, Vol. 78, Pag. 245-257.

Strogatz, S. H. (2000). *Nonlinear dynamics and chaos with applications to physics, biology, chemistry, and engineering*, Addison-Wesley, tercera edición.

Zambrano-Serrano, E., Muñoz-Pacheco, J. M., & Campos-Cantón, E. (2017). "Chaos generation in fractional-order switched systems and its digital implementation". International Journal of Electronics and Communications, Vol. 79, Pag. 43-52.